Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

Institut für Theoretische Physik

Yang-Mills-Konfigurationen auf höherdimensionalen Sphären

Masterarbeit

Kathrin Hannemann

27. Juli 2015

Gutachter: Prof. Dr. Olaf Lechtenfeld
Zweitgutacher: Jun.-Prof. Dr. Marco Zagermann

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen angefertigt habe. Alle aus diesen direkt oder sinngemäß übernommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht.

Hannover, den 27. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **1**
1.1 Superstringtheorie, Supergravitation und die Yang-Mills Gleichungen . . 1
1.2 Dp-Branen 4
1.3 Kompaktifizierung 4
1.3.1 Calabi-Yau-Kompaktifizierung, Orbifolds, Orientifolds, Fluss-Kompaktifizierung 4
1.3.2 Holonomie als zentraler Aspekt von Kompaktifizierung 6
1.4 Überblick 7

2 Grundlegendes **9**
2.1 Tensorfelder und k-Formen 9
2.2 Differential und Rücktransport 11
2.3 Kovariante Ableitung 11
2.4 Torsion, Krümmung und metrischer Defekt 12
2.5 Strukturgleichungen und Bianchi-Identitäten 13

3 Lie-Gruppen und Lie-Algebren **15**
3.1 Allgemeines 15
3.2 Lie-Ableitung und die Exponentialabbildung 17
3.3 Darstellungen und Killing-Form 19
3.4 Vektorwertige Formen 22
3.5 Charakterisierung (halb-)einfacher Lie-Algebren 23
3.5.1 Fitting-Zerlegung 23
3.5.2 Cartan-Weyl-Basis 24
3.5.3 Einfache Wurzeln und die Cartansche Struktur-Matrix 26
3.5.4 Irreduzible Δ_i^Λ-Darstellungen 28
3.6 Die Klassischen Lie-Gruppen 30

4 Prinzipalbündel **33**
4.1 Definition 33
4.2 Beispiele 35
4.3 Zusammenhänge in Prinzipalbündeln 36
4.3.1 Definition eines Zusammenhanges 36
4.3.2 Krümmung eines Zusammenhanges 38
4.4 Parallelverschiebung und Holonomie 38
4.5 Assoziierte Bündel 40
4.5.1 Definition 40
4.5.2 Beispiele 41

4.6 Homogene Bündel 42

5 Strukturen auf Prinzipalbündeln 43
5.1 G-Strukturen 43
5.2 (Fast-)Komplexe Strukturen 47
5.3 (Fast-)Hermitesche Strukturen 50
5.4 (Fast-, Nearly) Kähler-Strukturen 50

6 Von (Fast-)Kontaktstrukturen zu Sasaki-Mannigfaltigkeiten 53
6.1 Kontaktstrukturen 54
6.2 Fastkontaktstrukturen 55
6.3 (Fast-)Kontaktstrukturen mit kompatibler Metrik 55
6.4 Sasaki- und 3-Sasaki-Strukturen 56
6.4.1 Sasaki-Strukturen 56
6.4.2 3-Sasaki-Strukturen 58

7 Yang-Mills-Theorie 61
7.1 Yang-Mills-Zusammenhänge und die Yang-Mills-Gleichung 61
7.2 Eichtransformationen 63

8 Yang-Mills-Lösungen auf homogenen Räumen 65
8.1 Lokale Basisfelder und -formen auf G-Bündeln 66
8.2 Die Yang-Mills-Gleichungen auf $\mathbb{R} \times G/H$ 67
8.3 Modifizierte Yang-Mills-Gleichungen auf $\mathbb{R} \times G/H$ 71
8.4 Vertiefendes zur G-Invarianz-Bedingung 73
8.4.1 G-invariante Zusammenhänge 73
8.4.2 Lösen der G-Invarianz-Bedingung 74
8.4.3 Beispiel: $S^5 = SU(3)/SU(2)$ 75
8.5 Yang-Mills-Lösungen auf höherdimensionalen Sphären 77
8.5.1 Beispiel: $S^5 \cong SU(3)/SU(2)$ 77
8.5.2 Beispiel: $S^{2n+1} = SU(n+1)/SU(n)$ 79
8.5.3 Beispiel: $S^7 \cong Sp(2)/Sp(1)$. 82
8.5.4 Beispiel: $S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n)$ 85
8.6 Dyonische Lösungen 89
8.7 Periodische Lösungen (Sphaleronen) 90
8.8 Von Instantonen zu Yang-Mills-Lösungen 92
8.8.1 Instantonen und die Yang-Mills-Gleichung 92
8.8.2 Herleitung der modifizierten Yang-Mills-Gleichungen auf $\mathbb{R} \times M$ aus der Instantongleichung für α-Sasaki-Mannigfaltigkeiten $M = SU(n+1)/SU(n)$ 93

9 Zusammenfassung 99

A Herleitung der modifizierten Yang-Mills-Gleichungen mit flacher Metrik 101

B Herleitung der modifizierten Yang-Mills-Gleichungen mit Sasaki-Metrik g_h für $h \neq 0$ 105

C Herleitung der G-Invarianz-Bedingung **109**

D Bestimmung von $ad_{\mathscr{H}}(\mathscr{G})$für $G/H = SU(3)/SU(2)$ **111**

Literaturverzeichnis **113**

Kapitel 1

Einführung

Mit Inklusion der Supersymmetrie in die bis dato rein bosonische Stringtheorie war zu Beginn der 1970er Jahre der Grundstein für die später unter dem Namen M-Theorie bekannte Vereinheitlichung aller zehndimensionalen Superstringtheorien gelegt. Letztere lassen im Gegensatz zur rein bosonischen Stringtheorie (welche daher der Realität nicht gerecht werden kann) in ihrem tachyonfreien Spektrum nun auch fermionische Anregungen zu. Ihre fünf Repräsentanten I, IIA, IIB sowie die heterotischen Typen mit Eichgruppe $E_8 \times E_8$ beziehungsweise $SO(32)$ sollten sich Anfang der 1990er Jahre als bezüglich charakteristischer Transformationen zueinander duale Grenzfälle der gleichen Theorie herausstellen. Seitdem steht die Superstringtheorie für den vielleicht verheißungsvollsten Kandidaten einer fundamentalen vereinheitlichenden Theorie, welche sowohl Quantentheorie als auch Gravitation auf gemeinsamen Boden stellt: In quasirealistischer Kompaktifizierung entspricht Superstringtheorie für einen Beobachter kleiner Energie einer Theorie ähnlich der des Standardmodells gekoppelt an die der Gravitation [1].

Im niederenergetischen Grenzfall gehen M-Theorie und Superstringtheorie in die elfdimensionale bzw. zehndimensionale Supergravitation (SUGRA) über [2]. Aus dem bosonischen Anteil an der effektiven Wirkung für den heterotischen Superstring ergeben sich charakteristische Feldgleichungen, die für einen bestimmten Spezialfall die in dieser Arbeit betrachteten Yang-Mills-Gleichungen mit Torsion hervorbringen:

1.1 Superstringtheorie, Supergravitation und die Yang-Mills Gleichungen

Ausgangspunkt der Betrachtungen aller Typen von Superstringtheorie ist das 3-Tupel $(G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi)$ bosonischer masseloser Felder [3]: $G_{\mu\nu}$ bezeichnet hierbei die Komponenten der Raumzeit-Metrik und $B_{\mu\nu}$ die der sogenannten Neveu-Schwarz-2-Form B_2; Φ ist das Dilaton-Skalarfeld. Die verschiedenen Superstringtheorien unterscheiden sich nun zum einen bezüglich fermionischer und bosonischer Felder, um die obiges Tupel ergänzt wird, zum anderen in der Frage, welche Arten von Strings zugelassen werden:

- offene und geschlossene Strings (Typ I und II)
- nur geschlossene Strings (heterotische Typen)

Geschlossene Strings bedingen Gravitation, während offene Strings potentielle Wechselwirkungen mit nichtabelschen Eichfeldern implizieren.

Für das Hinzufügen von Fermionen gibt es nun verschiedene Möglichkeiten. Heterotische Theorien lassen Fermionen nur im rechtslaufenden Sektor des Strings zu, Typ II Theorien auch solche im linkslaufenden. Auf diese Weise erhält man für die heterotischen Theorien 32 Superladungen, also Supersymmetrie $\mathscr{N} = 2$, während Typ II Theorien mit 16 Superladungen Supersymmetrie $\mathscr{N} = 1$ aufweisen [3].

Die effektive Wirkung niedriger Energie, $S_{Superstring}$, ist gegeben durch

$$S_{Superstring} = S_1 + S_2 + S_{fermi}, \tag{1.1}$$

wobei S_{fermi} dem fermionischen und $S_1 + S_2$ dem bosonische Anteil entspricht. Im Folgenden soll S_{fermi} vernachlässigt werden. S_1 ist die aus der String-Theorie bekannte bosonische effektive Wirkung niedriger Energie. S_2 beschreibt die Dynamik der abhängig vom Theorietyp hinzugefügten Felder.

Für alle Typen ist S_1 gegeben durch [3]

$$S_1 = \frac{1}{\kappa_0^2} \int d^{10}X \sqrt{-G} e^{-2\Phi} \left(Ric - \frac{1}{2}|H_3|^2 + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \right) \tag{1.2}$$

Hierbei bezeichnet Ric den Ricci-Skalar und H_3 die vom Theorietyp abhängige Torsions-3-Form: Es ist

- $H_3 = dB_2$ für Typ IIA/IIB,
- $H_3 = dB_2 - \alpha' \omega_3/4 =: \tilde{H}_3$ für heterotische Typen mit der Chern-Simons-3-Form $\omega_3 = \ \mathrm{Tr} A_1 dA_1 + 2/3 A_1 \wedge A_1 \wedge A_1$ und einem nicht-abelschen Eichfeld A_1.

S_2 ergibt sich nun folgendermaßen: $\mathscr{N} = 1$ Superstringtheorien beinhalten neben besagtem 3-Tupel die sogenannten Ramond-Ramond-Felder C, welche als Eichfelder mit Feldstärke $F = dC$ verstanden werden können und eine Verallgemeinerung des aus der Elektrodynamik bekannten Eichpotentials darstellen. Im Fall von Typ IIA/IIB Theorien sind dies eine 1-Form C_1 mit Komponenten C_μ und eine 3-Form C_3 mit Komponenten $C_{\mu\nu\rho}$, bzw. eine 0-Form C_0, eine 2-Form C_2 mit Komponenten $C_{\mu\nu}$ und eine 4-Form C_4 mit Komponenten $C_{\mu\nu\rho\sigma}$. Für den Term S_2 bedeutet das

$$S_{2,IIA} = -\frac{1}{4\kappa_0^2} \int d^{10}X \left(\sqrt{-G} \left(|F_2|^2 + |\tilde{F}_4^2| \right) + B_2 \wedge F_4 \wedge F_4 \right) \tag{1.3}$$

mit $F_2 = dC_1$, $F_4 = dC_3$, $\tilde{F}_4 = F_4 - C_1 \wedge H_3$, wobei nun $H_3 := H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$, beziehungsweise

$$S_{2,IIB} = -\frac{1}{4\kappa_0^2} \int d^{10}X \left(\sqrt{-G} \left(|F_1|^2 + |\tilde{F}_3^2| + \frac{1}{2}|\tilde{F}_5^2| \right) + C_4 \wedge H_3 \wedge F_3 \right), \tag{1.4}$$

mit $F_1 = dC_0,\ F_3 = dC_2,\ F_5 = dC_4$ und $\tilde{F}_3 = F_3 - C_0 \wedge H_3$ sowie $\tilde{F}_5 = F_5 - \frac{1}{2}C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2}B_2 \wedge F_3$ mit selbstdualem $\tilde{F}_5$.

Für heterotische Theorien fügt man statt der Ramond-Ramond-Felder ein nicht-abelsches $\mathscr{G}$-wertiges Eichfeld mit Feldstärke F_2 hinzu, wobei $\mathscr{G}$ als Lie-Algebra entweder $E_8 \times E_8$ oder $SO(32)$ bezeichnet. Es ist damit

$$S_{2,Het} = \frac{\alpha'}{8\kappa_0^2} \int d^{10}X \sqrt{-G}\ \mathrm{Tr}|F_2|^2 \tag{1.5}$$

die Yang-Mills-Wirkung in zehn Dimensionen [3].

Wie bereits angedeutet, kann die Supergravitation als niederenergetischer Grenzfall von Superstringtheorien aufgefasst werden. Neben dem eingangs erwähnten Fall der 11d SUGRA als Grenzfall der M-Theorie reduzieren sich die verschiedenen 10d Superstringtypen im niederenergetischen Grenzfall folgendermaßen [4]:

- IIA $\to \mathscr{N} = 2A$ (nicht-chirale) 10d SUGRA
- IIB $\to \mathscr{N} = 2B$ (chirale) 10d SUGRA
- $E_8 \otimes E_8 \to \mathscr{N} = 1$ 10d SUGRA mit Kopplung an $E_8 \times E_8$ Yang-Mills-Multiplett
- $SO(32) \to \mathscr{N} = 1$ 10d SUGRA mit Kopplung an $SO(32)$ Yang-Mills-Multiplett
- I $\to \mathscr{N} = 1$ 10d SUGRA mit Kopplung an $SO(32)$ Yang-Mills-Multiplett

Der heterotische Superstring wird demnach im niederenergetischen Limes durch die zehndimensionale Theorie der Supergravitation beschrieben; aus dem bosonischen Anteil an der effektiven Wirkung lassen sich die Bewegungsgleichgungen für den bosonischen Feldanteil generieren. Sie lauten, vgl. ([5], [6]),

$$Ric_{\mu\nu} + 2\left(\nabla d\Phi\right)_{\mu\nu} - \frac{1}{4}H_{\mu\kappa\lambda}H_{\nu}^{\kappa\lambda} + \frac{\alpha'}{4}\left[R^{+}_{\mu\kappa\lambda\sigma}R_{\nu}^{+\kappa\lambda\sigma} - trF_{\mu\kappa}F_{\nu}^{\kappa}\right] = 0, \tag{1.6}$$

$$Ric + 4\Delta\Phi - 4|d\Phi|^2 - \frac{1}{2}|H|^2 + \frac{\alpha'}{4}tr\left[|R^{+}|^2 - |F|^2\right] = 0, \tag{1.7}$$

$$e^{2\Phi}d * e^{-2\Phi}F + A \wedge *F + (-1)^{n-1} * F \wedge A = 0, \tag{1.8}$$

$$d * e^{-2\Phi}H = 0. \tag{1.9}$$

Hierbei ist α' das Inverse der Stringspannung und $H = dB + \frac{\alpha'}{4}\left(CS(\Gamma^{+}) - CS(A)\right)$ mit den Chern-Simons-Formen $CS(\Gamma^{+})$ und $CS(A)$ von Γ^{+} bzw. A. $\Gamma^{\pm}$ sind Zusammenhänge auf dem Tangentialbündel definiert durch $(\Gamma^{\pm})^{\kappa}_{\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} \mp \frac{1}{2}H^{\kappa}_{\mu\nu}$. R^{+} bezeichnet die Krümmung des Zusammenhangs Γ^{+}. Desweiteren ist $tr(AB) = -A^{\mu}_{\nu}B^{\nu}_{\mu},\ A, B \in \mathfrak{so}(n)$. Die Yang-Mills-Gleichungen mit Torsion ergeben sich jetzt als Spezialfall aus (1.8) für verschwindendes Dilaton, $\Phi = 0$.

Die gesamte effektive Wirkung für den heterotischen Superstring, welche neben dem bosonischen auch den fermionischen Feldanteil berücksichtigt, impliziert die sogenannten BPS-Gleichungen [6]:

$$0 = \nabla^{-}\epsilon \tag{1.10}$$

$$0 = \gamma\left(d\Phi - \frac{1}{2}H\right)\epsilon \tag{1.11}$$

$$0 = \gamma(F)\epsilon \tag{1.12}$$

Hierbei ist ϵ ein Majorana-Spinor. (1.10), (1.11) und (1.12) sind die Graviton-, Dilaton- bzw. Gaugino-Gleichung, wobei die Gaugino-Gleichung auch generalisierte Instantongleichung genannt wird. Für bestimmte Ausgangskonfigurationen (siehe z.B. [6],[7]) implizieren die BPS-Gleichungen zusammen mit der Bianchi-Identität

$$dH = \frac{\alpha'}{4}tr\left(R^{+} \wedge R^{+} - F \wedge F\right) \tag{1.13}$$

die Feldgleichungen (1.6)-(1.9)

1.2 Dp-Branen

Mit Entdeckung der Dp-Branen (1995) zur Fixierung von Randbedingungen für offene Strings in Typ II Superstringtheorien waren zusätzlich zu den Strings wichtige eigenständige Objekte eigener Dynamik gefunden worden (siehe [3], [8], [9], [10] mit dortigen Verweisen, [11]): Auf Dp-Branen ist die Lorentzgruppe $SO(1, D-1)$ gebrochen,

$$SO(1, D-1) \rightarrow SO(1, p) \times SO(D-p-1).$$

p ist hierbei für Theorien vom Typ IIA gerade, für solche vom Typ IIB ungerade. Polchinski zeigte, dass Dp-Branen erhaltene topologische Ladungen tragen und BPS-Zuständen entsprechen, die die Symmetrien von insgesamt 32 auf die Hälfte reduzieren [11]. Folglich lässt sich die Dynamik der Dp-Branen bei niedrigen Energien durch maximal supersymmetrische Yang-Mills-Theorien beschreiben, welche wie die Branen selbst $U(1)$-Eichfelder A_a, $a = 0, ..., p$, sowie skalare Anregungen Φ^I tragen und genau 16 Supersymmetrien aufweisen. Die Φ^I entsprechen dabei Fluktuationen auf der Brane.

Neben der Interpretation als einschränkende Randbedingung können Dp-Branen auch als solitonische Lösungen makroskopischer Bewegungsgleichungen in der Theorie der Supergravitation verstanden werden. Diese Beschreibung berücksichtigt nur solche Freiheitsgrade, die für einen Beobachter kleiner Energie sichtbar sind. Dp-Branen werden auf diese Art zum Beispiel mit schwarzen Löchern, Instantonen oder Monopolen assoziiert. Für $p = -1, 0, 1, 2$ spricht man auch vom D-Instanton, -Teilchen, -String bzw. von der D-Membrane.

1.3 Kompaktifizierung

1.3.1 Calabi-Yau-Kompaktifizierung, Orbifolds, Orientifolds, Fluss-Kompaktifizierung

Die Auffassung der als vierdimensional wahrgenommenen Welt als lediglichen Teil einer insgesamt zehndimensionalen Raumzeit führt auf die Frage nach den verbleibenden sechs Dimensionen. Diese wird zum einen durch Verallgemeinerung der ursprünglich von Kaluza und Klein entwickelten Idee der Kompaktifizierung beantwortet. Bei dieser werden die übrigen Dimensionen als „unsichtbarer“ Hintergrund in Form einer kompakten sechsdimensionalen Mannigfaltigkeit begriffen. Entscheidend hierbei ist die Forderung, dass durch diese Kompaktifizierung die Supersymmetrie in der effektiven vierdimensionalen Theorie (bezüglich der Kompaktifizierungsskala) erhalten bleiben möge. Durch eine geeignete Kompaktifizierung sollten sich dann nach Lösen der Bewegungsgleichungen für den String die verifizierten Phänomene und Objekte des Universums extrahieren lassen, welche beispielsweise aus dem Standardmodell bekannt sind [8].

Ausgehend von der Konstruktion des heterotischen Strings in zehn Dimensionen mit Eichgruppe $E_8 \times E_8$ sind Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten geeignete Kandidaten für derartige Kompaktifizierungen [12]. Auf diesen verschwinden bis auf die nichttriviale Metrik alle Felder [13]. Es handelt sich um Ricci-flache Mannigfaltigkeiten spezieller Holonomie $G \subset SU(3)$, was mit der Existenz spezieller Spinoren korreliert [1] und die gewünschte Erhaltung von Supersymmetrie garantiert. Die $E_8 \times E_8$-wertigen Eichfelder sind dann Zusammenhänge des auf diesen Mannigfaltigkeiten konstruierten Vektorbündels, welches die Eichsymmetrie bricht. Auf diese Weise lassen sich supersymmetrische vierdimensionale $\mathcal{N} = 1$ Vakuumkonfigurationen finden.

Weiter verallgemeinernd eignen sich (supersymmetrische) Orbifolds [14] zur Kompaktifizierung, deren Betrachtung gegenüber der der nicht-singulären Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten eine gewisse Vereinfachung darstellt ([8] mit dortigen Verweise, [10], [11]).

Ein großes Problem im Zusammenhang mit Calabi-Yau-Kompaktifizierung besteht in den sogenannten Moduli-Feldern, skalare neutrale masselose Teilchen, deren Vakuumerwartungswert Größe und Form der kompaktifizierenden Mannigfaltigkeit sowie Position der Dp-Branen bestimmt [1], [8], [15]. Diese Felder sind Konsequenz der Kompaktifizierung und bringen eine Vielzahl an nicht sichtbaren Teilchen großer Masse mit sich, welche in einer effektiven vierdimensionalen Theorie keine Entsprechung kennen. Nicht zuletzt würden sie das Universum mit einer übergroßen Energiedichte „fluten". Desweiteren müsste die Größe ihrer Vakuumerwartungswerte Einfluss auf Massen und Eichkopplungen der vierdimensionalen effektiven Theorie haben. Ohne die explizite Bestimmung dieser Vakuumerwartungswerte im Rahmen eines Minimierungproblems für ein effektives Potential und damit gewonnene Kenntnis der Masse dieser Moduli-Felder wäre eine solche Stringtheorie von phänomenologischen Gesichtspunkten her problematisch.

Einen Ausweg stellt das Konzept der Fluss-Kompaktifizierung dar, mit dem solche Potentiale für Moduli-Felder generiert werden können [8], [15]: Neben einer nichttrivialen Metrik treten nun im Gegensatz zur rein geometrischen Calabi-Yau-Kompaktifizierung weitere antisymmetrische p-Form Felder C_p mit Feldstärke $F_{p+1} = dC_p$ auf. Um Brechung der vierdimensionalen Lorentzinvarianz zu vermeiden, müssen für letztere nichttriviale Vakuumerwartungswerte zugelassen werden. Die zusätzlichen Feldstärken F_{p+1} entsprechen Flüssen und modifizieren die Metrik in der Weise eines skalaren Potentials für Moduli-Felder in der effektiven vierdimensionalen Theorie. Auf diese Weise können die Moduli-Felder „unterdrückt" werden.

Ein anderer Ansatz zur Erklärung der „versteckten" Dimensionen stellt die Kompaktifizierung mit Orientifolds dar [16], die sich die besonderen Eigenschaften von Dp-Branen zu Nutze macht und als Verallgemeinerung der Kompaktifizierung des Strings vom Typ I in 10 Dimensionen mit Eichgruppe $SO(32)$ interpretiert werden kann [8]. Dp-Branen sind zum einen deswegen attraktive Kandidaten für Kompaktifizierung, da deren angeregte Moden kleinstmöglicher Energie mit der Existenz masseloser Eichfelder und deren Superpartner korrelieren ([1], [8] mit dortigen Referenzen) und zwei sich schneidende Dp-Branen an ihrer Schnittstelle chirale Fermionen, also maßgebliche Objekte des Standardmodells, generieren können [17]. Zum anderen bleiben durch eine geeignete Wahl der Branen bestimmte Supersymmetrien in einer Typ II Kompaktifizierung erhalten. Folglich sind Typ II Strings auf Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten mit einer geeigneten Konfiguration sich schneidender Branen geeignete Anwärter zur Beschreibung einer chiralen $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrischen niederenergetischen effektiven Theorie.

Es gibt drei Klassen von Typ II $\mathcal{N} = 1$ Kompaktifizierungen mit Branen auf Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten [1]:

- IIA Orientifold-Kompaktifizierung mit D6-Branen
- IIB Orientifold-Kompaktifizierung mit D7- und D3-Branen
- IIB Orientifold-Kompaktifizierung mit D9- und D5-Branen

M	dim$M$	H	G
S^n	n	$SO(n)$	$\{1\}$
nearly Kähler	6	$SU(3)$	G_2
nearly parallel G_2	7	G_2	$Spin(7)$
Sasaki-Einstein	$2n+1$	$SU(n)$	$SU(n+1)$
3-Sasaki	$4n+3$	$Sp(n)$	$Sp(n+1)$

Tabelle 1.1: Mannigfaltigkeiten M mit reellen Killing-Spinoren nach [18]. H bezeichnet hierbei die Strukturgruppe, G die Holonomiegruppe des Levi-Civita-Zusammenhangs auf dem Kegel $C(M)$.

Konkret hat man nach der Wahl der Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit eine sogenannte Orientifold-Projektion sowie Einbettung der Dp-Branen in die Raumzeit festzulegen ([1] mit dortigen Verweisen): Dabei füllt die Brane bereits alls vier Dimensionen des Minkowski-Raumes aus, so dass die restlichen $(p-3)$ räumlichen Dimensionen in eine kompaktifiziernde Mannigfaltigkeit eingebettet werden müssen. Die Festlegung der Hintergrund-Werte der Yang-Mills-Eichfelder auf den Branen hängt von der Klasse der Orientifold-Kompaktifizierung ab.

1.3.2 Holonomie als zentraler Aspekt von Kompaktifizierung

Mannigfaltigkeiten spezieller Holonomie sind wichtige Kandidaten für heterotische Stringkompaktifizierung, da diese die Erhaltung von Supersymmetrien in einer vierdimensionalen effektiven Theorie gewährleisten [19]: Wie bereits erwähnt, ist hierbei insbesondere die Betrachtung von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten von entscheidender Bedeutung, da diese phänomenologisch gesehen semi-realistische Modelle für die Teilchen liefern. Desweiteren sind in diesem Zusammenhang G_2-Mannigfaltigkeiten zu nennen, da sie die einfachste Möglichkeit bieten, M-Theorie in vier Dimensionen mit Supersymmetrie $\mathscr{N}=1$ zu kompaktifizieren.

Im Speziellen spielen Riemannsche Mannigfaltigkeiten M mit reellen Killing-Spinoren eine wichtige Rolle in der Stringkompaktifizierung. Diese haben einen Zusammenhang nichtverschwindender Torsion, darüber hinaus reduziert sich die Strukturgruppe $SO(n)$ ihres Tangentialbündels TM auf $H \subset SO(n)$. Insbesondere weist der Kegel über M, $C(M)$, spezielle Holonomie $G \subset SO(n+1)$ auf und trägt einen parallelen Killing-Spinor [20]. Eine Klassifikation solcher Mannigfaltigkeiten findet sich in Tabelle 1.1. All diese Mannigfaltigkeiten sind mit einer kanonischen 3-Form P sowie einer 4-Form Q ausgestattet, welche sich durch die Killing-Spinoren definieren lassen.

Instantonen auf dem Kegel über Mannigfaltigkeiten mit reellen Killing-Spinoren finden Anwendung im Rahmen heterotischer Supergravitation, und zwar bezüglich des Auffindens von Lösungen der BPS-Gleichungen und der Bianchi-Identität [20]: Sei M eine $(n+1)$-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Instanton ist eine Lösung der generalisierten anti-Selbstdualitätsgleichung (Instantongleichung)

$$*F + *Q \wedge F = 0, \tag{1.14}$$

wobei F die Feldstärke eines Zusammenhangs A auf einem Bündel über M bezeichnet (siehe z.B. [21] mit dortigen Referenzen). Q ist eine 4-Form auf M mit Hodge-Dual $*Q \in \Omega^{n-3}(M)$. In vier Dimensionen sind Instantonen BPS-Konfigurationen auf Spin-Mannigfaltigkeiten, die die Yang-Mills-Gleichungen implizieren. Umgekehrt sind aber nicht alle Yang-Mills-Lösungen Instanonen. In höheren Dimensionen spielen Yang-Mills-Instantonen sowohl in der Mathematik (siehe z.B. [22],[23]) als auch wie bereits erwähnt in der Stringtheorie eine wichtige Rolle [24]. Für dim $M = n + 1 > 4$ existieren Yang-Mills-Instantonen auf Mannigfaltigkeiten M spezieller Holonomie, denn auf diesen kann (1.14) definiert werden. Auf Mannigfaltigkeiten mit nicht-integrabler H-Struktur impliziert (1.14) die Yang-Mills-Gleichungen mit einem zusätzlichen Torsionsterm. Dieser verschwindet auf Mannigfaltigkeiten mit reellen Killing-Spinoren [20].

1.4 Überblick

Im Rahmen heterotischer Fluss-Kompaktifizierung in der Supergravitation lassen sich Stringvakua auf Raumzeiten $X_{10-d} \times M^d$ studieren. Auf dem kompaktifizierenden Anteil M^d existieren hierbei p-Form Felder, welche die Geometrie im Wesentlichen ausmachen. Insbesondere der Fall $p = 3$ impliziert eine nichtverschwindende Torsion proportional zu den Strukturkonstanten der Holonomiegruppe [25]. Untersucht man nun die Yang-Mills-Gleichungen mit Torsion als Sonderfall von (1.8) bezüglich Lösungen für bestimmte M, so sucht man damit nach Lösungen im Rahmen der Theorie der heterotischen Supergravitation.

Nach einer Einführung in die grundlegenden mathematischen Formalismen in den Kapiteln 2-7 wird in dieser Arbeit nach Yang-Mills-Lösungen auf $\mathbb{R} \times M$ gesucht mit $\mathbb{R}$ als Teil der nichtkompaktifizierten Raumzeit und Coseträumen $M = G/H$, wobei $G/H = S^5 \cong SU(3)/SU(2), S^{2n+1} \cong SU(n+1)/SU(n), S^7 \cong Sp(2)/Sp(1), S^{4n+3} \cong Sp(n{+}1)/Sp(n)$. Hierzu werden in geeigneter Basis für die Yang-Mills-Zusammenhangs-1-Form A (Abschnitt 8.1) ab 8.2 die Yang-Mills-Gleichungen mit Torsion T betrachtet, $T_{abc} = \kappa f_{abc}$ mit $\kappa \in \mathbb{R}$. Insbesondere wird für A die Erfüllung der G-Invarianz-Bedingung gefordert, was einen durch eine Funktion $\Phi = \Phi(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ parametrisierten Ansatz für A hervorbringt. Ein Beweis der sogar allgemeinsten Gültigkeit dieses Ansatzes wird in 8.4 angeführt. Die Betrachtung der oben genannten speziellen Mannigfaltigkeiten, welche vom Typ α-Sasaki bzw. 3-Sasaki sind, ist nur möglich nach charakteristischer Unterteilung der Menge von Generatoren des Cosets, wie in Abschnitt 8.3 allgemein vorgenommen. Diese hat die Existenz zusätzlicher parametrisierender Funktionen zufolge und führt somit insgesamt auf ein System gekoppelter Differentialgleichungen mit zugehörigem Potential $V = V(\kappa)$. In 8.5.1-8.5.4 werden schließlich die Yang-Mills-Gleichungen für die genannten Beispiele konkret aufgestellt und analytisch auf Lösungen untersucht, insbesondere auf solche vom Kinktyp. Die Abschnitte 8.6 und 8.7 widmen sich sogenannten Bounce- sowie periodischen Lösungen. Letztere gewinnt man durch die Ersetzung $\mathbb{R} \to S^1$.

Im Fall von α-Sasaki-Mannigfaltigkeiten lassen sich die Yang-Mills-Gleichungen alternativ aus der Instantongleichung ableiten, was eine Überprüfung der Ergebnisse ermöglicht. Auf Grundlage von [20] geschieht dies in Abschnitt 8.8.

Kapitel 2

Grundlegendes

Es werden nun zunächst elementare differentialgeometrische Begriffe definiert, auf denen die kommenden Abschnitte aufbauen. Das folgende Material findet sich in grundlegender Literatur zur Differentialgeometrie wie zum Beispiel [26],[27].

Sofern nicht anders angegeben, gelte in diesem Kapitel und in den folgenden immer die Einstein'sche Summenkonvention.

2.1 Tensorfelder und k-Formen

Definition 2.1.1. *Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in N$, dim $N = n$, (U, φ) eine Karte mit $U \ni p$, T_pN der Tangentialraum von N durch p mit Koordinatenbasis $(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n})$, T_p^*N der Kotangentialraum von N durch p mit der dualen Koordinatenbasis $(dx^1, ..., dx^n)$, das heißt $\frac{\partial}{\partial x^a}\big|_p dx^b\big|_p = \delta_a^b$. Dann bezeichnet*

$$T^l_{m\ p}(N) := \underbrace{T_p(N) \otimes ... \otimes T_p(M)}_{l\text{-mal}} \otimes \underbrace{T_p^*(N) \otimes ... \otimes T_p^*}_{m\text{-mal}} \tag{2.1}$$

*den n^{l+m}-dimensionale Vektorraum der **Tensoren** mit Elementen*

$$T = T^{a_1...a_l}_{b_1...b_m} \frac{\partial}{\partial x^1} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes dx^1 \otimes ... \otimes dx^m. \tag{2.2}$$

In koordinatenfreier Darstellung mittels der zueinander dualen Basen $(E_1, ..., E_l)$ und $(e^1, ..., e^m)$, $e^b\big|_p E_a\big|_p = \delta_a^b$, schreibt sich dies

$$T = T^{a_1...a_l}_{b_1...b_m} E_1 \otimes ... \otimes E_l \otimes e^1 \otimes ... \otimes e^m. \tag{2.3}$$

Für glatte Koeffizientenfunktionen $T^{a_1...a_l}_{b_1...b_m}$ seien $ST^l_m(N)$ die glatten ***Tensorfelder***, im Speziellen $ST^1_0(N)$ die glatten ***Vektorfelder*** und $ST^0_1(N)$ die glatten ***1-Formen*** auf N. Desweiteren bezeichne $\Lambda^k(T_p^*(N) =: \Lambda^k(N)$ die ***k-Formen*** ω auf N in p, $\omega\big|_U = \frac{1}{k!}\omega_{i_1}...\omega_{i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ bezüglich einer Karte (U, φ). Statt $dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ schreibt man oft verkürzend $dx^{i_1 \cdots i_k}$. Für $\eta \in \Lambda^k(N), \mu \in \Lambda^l(N)$ ist

$$(\eta \wedge \mu)(X_1, ..., X_{k+l}) := \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma) \eta \left(X_{\sigma(1)}.,,, .X_{\sigma(k)}\right) \mu \left(X_{\sigma(k+1)}.,,, .X_{\sigma(l+k)}\right). \tag{2.4}$$

Definition 2.1.2. *Die **äußere Ableitung** d ist die Abbildung*

$$d : \Lambda^k(N) \to \Lambda^{k+1}(N)$$

mit

$$df(X) = X(f), \tag{2.5}$$
$$d(df) = 0, \tag{2.6}$$
$$d(\eta + \eta') = d\eta + d\eta', \tag{2.7}$$
$$d(\eta \wedge \mu) = d\eta \wedge \mu + (-1)^l \eta \wedge d\mu \tag{2.8}$$

für $f \in C^\infty(M),\ X \in \mathfrak{X}(M), \eta, \eta' \in \Lambda^l(M)$ sowie $\mu \in \Lambda^m(M)$.

Lokal ist

$$d\omega\big|_U = \frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial x^{i_0}}\omega_{i_1}...\omega_{i_k} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} ... \wedge dx^{i_k}. \tag{2.9}$$

Proposition 2.1.3. *Für $\eta \in \Lambda^l(M)$ ist $d\eta = 0$ falls $l = n = dimM$ und für $l < n$*

$$\begin{aligned} d\eta(X_0, ..., X_l) = &\sum_{0 \le i \le l} (-1)^i X_i \left(\eta(X_0, ..., \hat{X}_i, ..., X_l)\right) \\ &+ \sum_{0 \le i \le j \le l} (-1)^{i+j} \eta \left([X_i, X_j], X_0, ..., \hat{X}_i, ..., \hat{X}_j, ..., X_l\right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Die mit einem Dach markierten Vektorfelder entfallen dabei im Argument. Speziell für ein Basiselement e^c ist

$$de^c(X, Y) = X\left(e^c(Y)\right) - Y(e^c(X)) - e^c([X, Y]). \tag{2.11}$$

Definition 2.1.4. *Sei N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer Metrik $g \in ST_2^0(N)$, wobei g nicht-ausgeartet, symmetrisch und bilinear, so ist durch die Abbildung*

$$*_N : \Lambda^k(N) \to \Lambda^{n-k}(N), \tag{2.12}$$
$$*_N\left(e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_k}\right) = \frac{\sqrt{|g|}}{(n-k)!}\varepsilon^{i_1...i_k}_{j_{k+1}...j_n} e^{j_{k+1}} \wedge ... \wedge e^{j_n}, \tag{2.13}$$

*der **Hodge-Operator** (in koordinatenfreier Darstellung) definiert, wobei*

$$\varepsilon_{i_1...i_n} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (i_1...i_n) \text{ eine gerade Permutation von (1...n) ist,} \\ -1 & \text{falls } (i_1...i_n) \text{ eine ungerade Permutation von (1...n) ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{2.14}$$

Über den Hodge-Operator ist mit $\langle\ ,\ \rangle$ auf $\Lambda^k(N)$ ein Skalarprodukt so definiert, dass

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle dN = \alpha_1 \wedge *_N \alpha_2 \tag{2.15}$$

für $\alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^k(N)$ und eine Volumenform dN.

2.2 Differential und Rücktransport

Definition 2.2.1. *Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension m bzw. n, $f : M \to N$ eine glatte Abbildung und $q \in M$. Die lineare Abbildung*

$$\begin{aligned} f_{*q} : T_qM &\to T_{f(q)}N, \\ X_q &\mapsto f_{*q}X_q \end{aligned} \tag{2.16}$$

*definiert das Differential (**Pushforward**) von f in q. Für eine Kurve γ in M, $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = X \in T_pM$, schreibt sich der Pushforward mit f als*

$$f_*X = f_*(\gamma'(0)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)\,. \tag{2.17}$$

Definition 2.2.2. *Der Rücktransport (**Pullback**) ist für $\omega \in \Lambda^k(N)$ definiert als die Abbildung*

$$\begin{aligned} f_q^* : T^*_{f(q)}(N) &\to T^*_q(M), \\ \omega_q &\mapsto f_q^*\omega_q := \omega_q \circ f_{*q}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Damit kann der Pushforward über den Pullback geschrieben werden, $f_{*q}X_q = X_q \circ f_q^*$.

2.3 Kovariante Ableitung

Definition 2.3.1. *Eine Abbildung*

$$\begin{aligned} \nabla : ST^1_0(N) \times ST^l_m(N) &\to ST^l_m(N), \\ (X, T) &\mapsto \nabla_X T, \end{aligned} \tag{2.19}$$

die

$$\nabla_X f = \nabla_X f, \tag{2.20}$$

$$A \mapsto \nabla_X A \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}, \tag{2.21}$$

$$\nabla_X(A \otimes B) = \nabla_X A \otimes B + A \otimes \nabla_X B \tag{2.22}$$

*für $A \in ST^l_m(N)$, $B \in ST^{l'}_{m'}(N)$, $f \in C^\infty$, $X, Y \in ST^1_0$ genügt, heißt **kovariante Ableitung** eines Tensorfeldes T nach einem Vektorfeld X mit Komponenten*

$$\nabla_{E_c} T = \nabla_{E_c}\left(T^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_m}\right) E_{a_1} \otimes \dots \otimes E_{a_l} \otimes \dots \otimes e^{b_1} \otimes \dots \otimes e^{b_m} \tag{2.23}$$

bezüglich der Basisfelder $(E_1, ..., E_l)$ bzw. $(e^1, ..., e^m)$. Es ist

$$\begin{aligned} \nabla_{E_c} T^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_m} := E_c T^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_m} &+ \omega^{a_1}_{cd} T^{d a_2 \dots a_l}_{b_1 \dots b_m} + \dots + \omega^{a_l}_{cd} T^{a_1 \dots a_{l-1} d}_{b_1 \dots b_m} \\ &- \omega^d_{cb_1} T^{a_1 \dots a_l}_{d b_2 \dots b_m} - \dots - \omega^d_{cb_m} T^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_{m-1} d}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Speziell für die Basisfelder ist

$$\begin{aligned} \nabla_{E_a} E_b &= \omega^c_{ab} E_c \\ \nabla_{E_a} e^b &= -\omega^b_{ac} e^c \end{aligned} \tag{2.25}$$

*mit **Zusammenhangskomponenten** ω^c_{ab}.*

2.4 Torsion, Krümmung und metrischer Defekt

Definition 2.4.1. *Sei im Folgenden (N, g, ∇) eine Mannigfaltigkeit mit Metrik $g \in ST_0^2(N)$ und Zusammenhang ∇. Vermittels ∇ kann sowohl die **Torsion** T als auch die **Krümmung** R definiert werden,*

$$\begin{aligned} T \in ST_2^1(N),\ & T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \\ & T(X,Y) = -T(Y,X) \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned} R \in ST_3^1(N),\ & R(X,Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \\ & R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z. \end{aligned} \tag{2.27}$$

R kann alternativ als endomorphismenwertige 2-Form $\Omega : T_pM \times T_pM \to End(T_pM)$ verstanden werden.

Speziell für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit lässt sich der Krümmungstensor anschaulich als ein „Maß“ für die Abhängigkeit des Paralleltransportes eines Vektorfeldes von der Reihenfolge auffassen, in der die vermittelnden Wege durchlaufen werden, siehe hierzu auch Kapitel 4.4. In einer dualen Basis $(E_1, ..., E_l)$ bzw. $(e^1, ..., e^m)$ ist

$$T = T^a_{bc} E_a \otimes e^b \otimes e^c = \frac{1}{2} T^c_{ab} E_c \otimes \left(e^a \wedge e^b\right), \tag{2.28}$$

$$-T^a_{cb} = T^a_{bc} = \omega^a_{bc} - \omega^a_{cb} - C^a_{bc}, \tag{2.29}$$

$$R = R^d_{abc} E_d \otimes e^a \otimes e^b \otimes e^c = \frac{1}{2} R^d_{cab} \left(E_d \otimes e^c\right) \otimes \left(e^a \wedge e^b\right), \tag{2.30}$$

$$R^a_{bcd} = E_c(\omega^a_{db}) - E_d(\omega^a_{cb}) + \omega^a_{cn}\omega^n_{db} - \omega^a_{dn}\omega^n_{cb} - C^n_{cd}\omega^a_{nb}, \tag{2.31}$$

denn es gilt $[E_b, E_c] = C^a_{bc} E_a \in ST_0^1(N)$. Dieser Ausdruck verschwindet in einer Koordinatenbasis, $\{E_a\}_a = \{\frac{\partial}{\partial x^a}\}_a$. Statt ω^a_{bc} schreibt man für die Zusammenhangskomponenten dann Γ^a_{bc} und bezeichnet diese als ***Christoffelsymbole***.

Die Torsion lässt sich alternativ als Tensor $\Theta \in ST_3^0(N)$ auffassen so, wie auch die Krümmung über einen Tensor $Riem \in ST_4^0(N)$ charakterisiert werden kann; im ersten Fall gibt man Θ mit Hilfe von g über eine Vorschrift an, die alle Kovektoren auf einmal auswertet:

$$\Theta(X,Y,Z) := g\left(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y - [Y,Z]\right) \tag{2.32}$$

$$\Theta(X,Y,Z) = -\Theta(X,Z,Y) \tag{2.33}$$

Die Komponenten lauten

$$\Theta(X,Y,Z) = -\Theta(X,Z,Y), \tag{2.34}$$

$$\Theta_{abc} = g_{an} T^n_{bc},\ g^{an}\Theta_{nbc} = T^a_{bc}. \tag{2.35}$$

Im zweiten Fall ist

$$Riem(W,X,Y,Z) := g(W, R(X,Y)Z), \tag{2.36}$$

$$Riem(W,X,Y,Z) = -Riem(W,X,Z,Y) \tag{2.37}$$

mit Komponenten

$$(Riem)_{abcd} = g_{an} R^n_{bcd},\ R^a_{bcd} = g^{an}(Riem)_{nbcd}. \tag{2.38}$$

Um einen Zusammenhang vollständig zu charakterisieren, ist neben der Torsion der Begriff des metrischen Defektes notwendig:

Definition 2.4.2. *Der **metrischen Defekt** Q ist ein Tensorfeld*

$$\begin{aligned} Q \in ST_3^0(N),\ & Q(X,Y,Z) := X(g,(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ & Q(X,Y,Z) = Q(X,Z,Y) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Der eindeutig bestimmte torsionfreie ($T = 0$) und metrische ($Q = 0$) Zusammenhang heißt ***Levi-Civita-Zusammenhang***. Allgemein kann durch Vorgabe von T und Q eine kovariante Ableitung eindeutig definiert werden.

2.5 Strukturgleichungen und Bianchi-Identitäten

Laut Definition 2.4.1 kann die Krümmung R als matrixwertige 2-Form Ω mit Komponenten $\Omega^d_c := \frac{1}{2} R^d_{cab} e^a \wedge e^b$ aufgefasst werden. Analog interpretiert man ω als matrixwertige 1-Form mit Komponenten $\omega^c_b := \omega^c_{ab} e^a$.

Um die Komponenten des Zusammenhanges und dessen Krümmung zu berechnen, sind die erste und zweite ***Cartansche Strukturgleichung*** nützlich. Diese ergeben sich direkt aus (2.28) bzw. (2.30) unter Ausnutzung von (2.11),

$$T = de + \omega \wedge e, \tag{2.40}$$

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega. \tag{2.41}$$

Für allgemeine Zusammenhänge ergeben sich die beiden ***Bianchi-Identitäten*** als äußere Ableitung von (2.40) bzw. (2.41) ,

$$dT + \omega \wedge T = \Omega \wedge e, \tag{2.42}$$

$$d\Omega + \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega = 0. \tag{2.43}$$

Kapitel 3

Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Lie-Gruppen sind analytische Mannigfaltigkeiten mit einer Gruppenstruktur so, dass die Gruppenoperationen analytisch sind. Sie stellen als Transformationsgruppen geometrischer Objekte ein wichtiges Werkzeug der theoretischen Physik dar, insbesondere sind sie zur Beschreibung und Klassifikation stetiger Symmetrien nützlich, wie beispielsweise der Lorentzinvarianz oder auch in Bezug auf Eichtheorien. Lie-Algebren stellen als Tangentialräume an die Einheit von Lie-Gruppen infinitesimale Transformationen bereit. Halbeinfache Lie-Algebren bilden mit ihren Darstellungen eine entscheidende Grundlage in zum Beispiel der Beschreibung der Theorie des Standardmodells.

Im Folgenden soll ein grober Überblick über die Theorie von Lie-Gruppen und Lie-Algebren gegeben werden. Es handelt sich hierbei um eine Zusammenstellung von Material aus [28], [29], [30], [31], [57], [58].

3.1 Allgemeines

Definition 3.1.1. *Eine* ***Lie-Gruppe*** *G ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, auf der die Gruppenmultiplikation μ und die Inversenbildung i C^∞-Funktionen sind,*

$$\mu : G \times G \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2, \tag{3.1}$$

$$i : G \to G, g \mapsto g^{-1}. \tag{3.2}$$

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathscr{G}$ zusammen mit der ***Lie-Klammer***

$$C : \mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}, (x, y) \mapsto [x, y], \tag{3.3}$$

heißt ***Lie-Algebra****.*

Die Lie-Klammer (Kommutator) ist antisymmetrisch, linear und erfüllt die Jacobi-Identität,

$$\begin{aligned} &[x, y] = -[y, x], \\ &[ax, y] = a[x, y], \\ &[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

mit $a \in \mathbb{C}, \mathbb{R}$. Daher ist jede assoziative Algebra auch eine Lie-Algebra, denn über das assoziative Produkt lässt sich die Lie-Klammer definieren als $[x, y] := xy - yx$.

Alternativ kann der Tangentialraum an die Einheit von G, T_eG, als Lie-Algebra aufgefasst werden, denn durch ***links- bzw. rechtsinvariante Vektorfelder*** wird auf T_eG eine Lie-Algebrastruktur induziert:

Definition 3.1.2. *Sei für $T_eG = \mathscr{G}$ mit*

$$\begin{aligned} L_h : \mathscr{G} \to \mathscr{G}, x \mapsto hx \\ \text{bzw. } R_h : \mathscr{G} \to \mathscr{G}, x \mapsto xh \end{aligned} \tag{3.5}$$

die ***Links- bzw. Rechtswirkung*** *von $G \ni h$ gegeben. Für diese gilt $L_e x = x$ bzw. $R_e x = x$, $L_{h_1}(L_{h_2}(x)) = L_{h_1 h_2}(x)$ bzw. $R_{h_1}(R_{h_2}(x)) = R_{h_1 h_2}(x)$ $\forall h_1, h_2 \in G$ und e ist das Einselement.*

Sowohl die Rechts- als auch die Linkswirkung sind ***transitiv*** und ***frei***, das heißt

$$\exists h \in G : L_h x_1 = x_2 \ \forall x_1, x_2, \tag{3.6}$$

$$\text{bzw. } \forall x \in M \ \forall h \in G : L_h x = x \Rightarrow h = e, \tag{3.7}$$

und analog für R_h.

Definition 3.1.3. *Sei $x \in \mathscr{G}$, dann können zu x* ***links- bzw. rechtsinvariante Vektorfelder*** *$\bar{X}_L, \bar{X}_R \in ST_0^1(G)$ assoziiert werden durch*

$$\bar{X}_L(g) = L_{g*e} x \text{ bzw. } \bar{X}_R(g) = R_{g*e} x, \tag{3.8}$$

wobei L_{g*e} bzw. R_{g*e} den Pushforward mit der Links- bzw. Rechtswirkung in e bezeichnet. Die Links- bzw. Rechtsinvarianz versteht sich dabei wie folgt:

$$\bar{X}_L(hg) = L_{hg*e} x = (L_h \circ L_g)_{*e}\, x = L_{h*g} \circ L_{g*e} x = L_{h*g} \bar{X}_L(g), \tag{3.9}$$

analog für $\bar{X}_R(gh)$. Mit $x, y \in \mathscr{G}$ ist auch $[x, y] \in \mathscr{G}$ und $[x, y] = [\bar{X}_L, \bar{Y}_L]\big|_e$.

Jede Lie-Algebra ist durch die Angabe ihrer Basis vollständig bestimmt:

Definition 3.1.4. *Sei $\{E_1, ..., E_n\}$ eine Basis von $\mathscr{G}$. Dann ist*

$$[E_a, E_b] = f_{ab}^c E_c \tag{3.10}$$

mit ***Strukturkonstanten*** *$f_{ab}^c \in \mathbb{F}$.*

Wegen der Jacobi-Identität gilt

$$f_{[ab}^n f_{c]n}^d = 0 \tag{3.11}$$

mit Summation über geklammerte Indizes unter zyklischer Vertauschung.

Definition 3.1.5. *Eine Lie-Algebra $\mathscr{G}$ heißt* **abelsch***, wenn $[x, y] = 0 \ \forall x, y \in \mathscr{G}$. Eine* **Lie-Unteralgebra** *ist ein linearer Unterraum $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$ so, dass $[x, y] \in \mathscr{G}' \ \forall x, y \in \mathscr{G}'$, das heißt $\mathscr{G}'$ ist selbst auch eine Lie-Algebra. Gilt $[y, x'] \in \mathscr{G}' \ \forall y \in \mathscr{G} \ \forall x' \in \mathscr{G}'$, so* *heißt $\mathscr{G}'$* **Ideal** *in $\mathscr{G}$. $\{0\}$ und $\{\mathscr{G}\}$ sind trivialerweise Ideale. Ein besonderes Ideal stellt das* **Zentrum** *C von $\mathscr{G}$ dar, $C(\mathscr{G}) := \{x \in \mathscr{G} : [x,y] = 0\ \forall x, y \in \mathscr{G}\}$. Es ist per Definition abelsch. Eine Lie-Algebra $\mathscr{G}$ heißt* **einfach***, falls sie nicht abelsch ist und keine nicht-trivialen Ideale besitzt. Sie heißt* **halbeinfach***, falls sie sich als direkte Summe einfacher Lie-Algebren schreiben lässt.*

Auf diese Weise lässt sich eine Lie-Algebra vollständig klassifizieren, siehe dazu Kapitel 3.5. Es ist klar, dass $C(\mathscr{G}) = 0$ für halbeinfache Lie-Algebren.

3.2 Lie-Ableitung und die Exponentialabbildung

Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Fragt man nach der Änderung eines Tensorfeldes $T \in ST^l_m(M)$ entlang eines gegebenen Vektorfeldes $X \in ST^1_0(M)$, so führt dies auf den Begriff der ***Lie-Ableitung***. Anders als die kovariante Ableitung ist diese weder C^∞-linear in X noch ultralokal. Letzteres bedeutet, dass der Wert der Lie-Ableitung in einem Punkt p nicht nur vom Wert des Vektorfeldes in diesem Punkt abhängt sondern auch von dessen Ableitungen.

Korollar 3.2.0.1. *Sei $\mathscr{L}$ die Lie-Ableitung mit*

$$\begin{aligned} \mathscr{L} : ST^l_m(M) \times ST^1_0(M) &\to ST^l_m(M), \\ (T, X) &\mapsto \mathscr{L}_X T. \end{aligned} \tag{3.12}$$

und sei $\mathscr{L}$ $\mathbb{R}$-linear, $\mathscr{L}_X(aT) = a\mathscr{L}_X(T)$ für $a \in \mathbb{R}$. Ferner gelte

$$\mathscr{L}_X f = X(f), \tag{3.13}$$

$$\mathscr{L}_X Y = [X, Y], \tag{3.14}$$

$$\mathscr{L}_X(T \otimes T') = \mathscr{L}_X T \otimes T' + T \otimes \mathscr{L}_X T', \tag{3.15}$$

$$\mathscr{L}_{fX} Y = f\mathscr{L}_X Y - Y(f)X, \tag{3.16}$$

$$\mathscr{L}_{fX}\omega = f\mathscr{L}_X\omega + \omega(X)df \tag{3.17}$$

für $f \in C^\infty, X, Y \in ST^1_0(M), \omega \in ST^0_1, T \in ST^l_m(M), T' \in ST^{l'}_{m'}$. Offensichtlich ist dann $\mathscr{L}$ eine Derivation.

Bemerkung 3.2.1. Um den Wert $\mathscr{L}_X T$ an einem Punkt $p \in M$ definieren zu können, reicht es aus, dass X und P auf einer beliebig kleinen Umgebung $U \ni p$ definiert sind. Seien

$$T\big|_U = T^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_m} \frac{\partial}{\partial x^{a_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{a_l}} \otimes dx^{b_1} \otimes \dots \otimes dx^{b^m}, \tag{3.18}$$

$$X\big|_U = X^c \frac{\partial}{\partial x^c} \tag{3.19}$$

die Einschränkungen von T und X in einer Koordinatenbasis $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ und ihrem Dual $\{dx^1, \dots, dx^n\}$. Dann gilt allgemein für die Komponenten $T^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_m}$ der Lie-Ableitung

$$\begin{aligned} (\mathscr{L}_X T)^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_m} := X^c T^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_{m,c}} - X^{a_1}_{,d} T^{d a_2 \dots a_l}_{b_1 \dots b_m} - \dots - X^{a_l}_{,d} T^{a_1 \dots a_{l-1} d}_{b_1 \dots b_m} \\ + X^d_{,b_1} T^{a_1 \dots a_l}_{d b_2 \dots b_m} + \dots + X^d_{,b_m} T^{a_1 \dots a_l}_{b_1 \dots b_{m-1} d}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

wobei $X^b_{,c} = \frac{\partial X^b}{\partial x^c}$.

Um die Ableitung eines Tensorfeldes T entlang eines Vektorfeldes X, das heißt die Wertänderung von T in eine vorgegebene Richtung von einem Punkt q hin zu einem Punkt p angeben zu können, ist die Identifikation der die Bildwerte $T(p)$ bzw. $T(q)$ enthaltenden Räume vermittels eines kanonischen Isomorphismus notwendig, welcher von der vorgegebenen Richtung abhängt. Dies ermöglicht die sogenannte 1-Parameter-Gruppe:

Definition 3.2.2. *Sei $X \in ST_0^1(M)$ ein Vektorfeld mit $X_{\gamma_x(t)} = \gamma_x'(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, wobei γ eine Kurve durch x ist,*

$$\begin{aligned} \gamma_x:\ I :=]-\epsilon,\epsilon[&\to M, \\ t &\mapsto \gamma_x(t) := p. \end{aligned} \tag{3.21}$$

*Die **lokale 1-Parameter-Gruppe** der von X erzeugten Diffeomorphismen ist gegeben durch*

$$\left\{ \Phi_t^X \middle| \Phi_t^X : M \to M, \Phi_t^X(x) := \gamma_x(t) \right\} \tag{3.22}$$

*und wird auch als Menge aller **Flüsse von X** bezeichnet. Insbesondere gilt*

$$\Phi_t^X \circ \Phi_s^X = \Phi_{t+s}^X\ \forall s,t \in I,\ \ s+t \in I. \tag{3.23}$$

Ausgehend von einem Punkt $x \in M$ bewegt man sich also mit einem Zeitparameter t auf der Integralkurve, wobei man auf dieser zu jedem Zeitpunkt am Ort $\gamma_x(t)$ lokalisiert ist. Läuft man nun in einer Zeit s bis zum Punkt $\gamma_x(s)$ und dann weiter für r Zeiteinheiten, so gelangt man bei $\gamma_x(s+r) = \gamma_{\gamma_q(s)}(r)$ an. Die Bewegungsrichtung in jedem Punkt x ist durch das dortige Vektorfeld $V(x)$ gegeben, $\dot{\gamma}_x(t) = V(\gamma_x(t))$.

Damit kann die Lie-Ableitung eines Tensorfeldes T entlang eines Vektorfeldes X alternativ geschrieben werden als

$$\mathscr{L}_X(T) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi_t^{X*} T, \tag{3.24}$$

wobei Φ_t^{X*} der Pull-Back des Flusses entlang X ist. Speziell ist

$$\mathscr{L}_X(f) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi_t^{X*} f = X(f) \tag{3.25}$$

für $f \in C^\infty$,

$$\mathscr{L}_X(Y) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi_{-t}^{X*} Y = [X,Y] \tag{3.26}$$

für Vektorfelder X,Y und

$$\mathscr{L}_X(\omega) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Phi_t^{X*} \omega = (d \circ i_X + i_X \circ d)\omega \tag{3.27}$$

für p-Formen ω, $\omega \in ST_p^0(M), p \geq 1$, und der ***Kontraktionsabbildung*** $i_X : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p-1}(M), \omega \mapsto i_X\omega,\ (i_x\omega)(X_1, ..., X_p) = p\ \omega(X, X_1, ..., X_p)$.

Mit der 1-Parameter-Gruppe lässt sich auch eine Relation zwischen Lie-Gruppe G und Lie-Algebra $\mathscr{G}$ finden, die Exponentialabbildung:

Definition 3.2.3. *Die* ***Exponentialabbildung*** *ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} exp : \mathscr{G} = T_e G &\to G \\ x &\mapsto \Phi_t^{\bar{X}_L}\Big|_{t=1}(e), \end{aligned} \tag{3.28}$$

wobei $\bar{X}_L$ das linksinvariante Vektorfeld ist.

Bewegt man sich also, anschaulich gesprochen, von der Einheit e ausgehend eine Parametereinheit entlang dessen Integralkurve $\gamma_{\bar{X}_L}$ durch $e = \gamma_{\bar{X}_L}(t = 0)$, erreicht man das zu $\mathfrak{g} \in \mathscr{G}$ gehörige Lie-Gruppenelement $g \in G$.

3.3 Darstellungen und Killing-Form

Definition 3.3.1. *Sei $\mathscr{G}$ eine Lie-Algebra. Eine* ***lineare Darstellung*** *$(\dot{\rho}, V)$ von $\mathscr{G}$ auf V ist ein Lie-Homomorphismus*

$$\dot{\rho} : \mathscr{G} \to End(V). \tag{3.29}$$

$(\dot{\rho}, V)$ heißt ***reduzibel****, wenn es einen nicht-trivialen invarianten Unterraum $V' \subset V$ ($V' \neq \{0\}$) gibt, wenn also*

$$\dot{\rho}_x(V') \subseteq V' \tag{3.30}$$

für alle $x \in \mathscr{G}$. Andernfalls heißt die Darstellung ***irreduzibel****. Die Darstellung (ρ, V) einer Lie-Gruppe G auf V ist ein Lie-Homomorphismus ρ,*

$$\rho : G \to GL(V) \tag{3.31}$$

mit analoger Definition von (Ir-)Reduzibilität.

Eine besondere Darstellung ist die durch eine Derivation, die Lie-Ableitung, definierte Darstellung:

Lemma 3.3.2. *Sei $Der(\mathscr{G})$ die Menge aller Derivationen von $\mathscr{G}$,*

$$Der(\mathscr{G}) := \{\varphi \mid \varphi : \mathscr{G} \to \mathscr{G} \text{ linear, } \varphi([x, y]) = [\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)]\} \tag{3.32}$$

mit $x, y \in \mathscr{G}$. Diese ist selbst wieder eine Lie-Algebra.

Jedem $x \in \mathscr{G}$ lässt sich ein linearer Operator ad_x zuweisen. Die Algebra aller ad_x ist die adjungierte Darstellung von $\mathscr{G}$:

Definition 3.3.3. *Die Darstellung*

$$\begin{aligned} ad_x : \mathscr{G} &\to Der(\mathscr{G}) \\ y &\mapsto ad_x y := [x, y] \end{aligned} \tag{3.33}$$

heißt ***adjungierte Darstellung*** *von $\mathscr{G}$. Ein* ***Eigenvektor*** *h von ad_x erfüllt die Relation $ad_x h = \alpha(h)h$ mit* ***Eigenwerten*** *$\alpha(h) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$.*

Die adjungierte Darstellung einer Lie-Algebra $\mathscr{G}$ wird folgendermaßen induziert: Sei $g \in G$. Der C^∞-adjungierte Isomorphismus ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{Ad}_g : G &\to G \\ g' &\mapsto \mathfrak{Ad}_g g' := gg'g^{-1}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Sei außerdem

$$\mathfrak{ad}_g : \mathscr{G} \to \mathscr{G} \tag{3.35}$$

der durch

$$\mathfrak{ad}_g = (\mathfrak{Ad}_g)_{*e} \tag{3.36}$$

induzierte Homomorphismus. Für diesen gilt dann

$$\mathfrak{ad}_{g*e}\left([y,z]\right) = [\mathfrak{ad}_{g*e}y, \mathfrak{ad}_{g*e}z]. \tag{3.37}$$

Sei Ad der Homomorphismus

$$\begin{aligned} Ad : G &\to GL(\mathscr{G}) \\ g &\mapsto Ad(g) := \mathfrak{ad}_g = \mathfrak{Ad}_{g*e}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Man nennt diesen die adjungierte Darstellung von G auf $\mathscr{G}$. Es gilt sogar

$$\mathfrak{ad}_g([x,y]) = [\mathfrak{ad}_g x, \mathfrak{ad}_g y] \ \forall x, y \in \mathscr{G}.$$

Folglich respektiert Ad nicht nur die lineare, sondern auch die Lie-Struktur.
Genauso kann man die adjungierte Darstellung einer Lie-Algebra definieren als

$$ad : \mathscr{G} \to \mathscr{G}l(\mathscr{G}), \tag{3.39}$$

$$ad = Ad_{*e}. \tag{3.40}$$

Ist $\{E_i\}$ eine Basis für $\mathscr{G}$, dann ist $\{ad_{E_i}\}$ eine Basis für $ad_{\mathscr{G}}$. Die Matrixelemente der adjungierten Darstellung sind gerade die Strukturkonstanten, $(ad_{x_k})^i_j = f^i_{kj}$.

Vermittels der adjungierten Darstellung ad_x lässt sich eine weitere Eigenschaft von Lie-Algebren definieren:

Definition 3.3.4. *Eine Lie-Algebra $\mathscr{G}$ heißt* ***reduktiv****, wenn ihre adjungierte Darstellung vollständig reduzibel ist.*

Für reduktive Lie-Algebren $\mathscr{G}$ ist $\mathscr{G} = \mathscr{G}_1 \oplus ... \oplus \mathscr{G}_m$ direkte Summe einfacher Ideale, denn es gilt $[\mathscr{G}, \mathscr{G}_k] \subset \mathscr{G}_k$. Die einfachen Ideale $\mathscr{G}_k$ bilden also invariante Unterräume bezüglich $ad_{\mathscr{G}}$. Folglich zerfällt die reduzible Darstellung einer reduktiven Lie-Algebra in die direkte Summe der irreduziblen Darstellungen ihrer einfachen Ideale.
Halbeinfache und abelsche Lie-Algebren sind reduktiv, ebenso kompakte reelle Lie-Algebren.

Für allgemeine Lie-Algebren lässt sich die adjungierte Darstellung hingegen nur im folgenden Sinne reduzieren: Zwar zerfällt $\mathscr{G}$ in die direkte Summe von Unterräumen $\mathscr{G}_k$, $k = 1, .., m$, aber es ist jetzt

$$[\mathscr{G}, \mathscr{G}_k] \subset \mathscr{G}_1 \oplus ... \oplus \mathscr{G}_k. \tag{3.41}$$

Alle Operatoren ad_x, $x \in \mathscr{G}$, sind in dieser Zerlegung so als Dreiecksmatrizen mit $n_k \times n_k$ Blöcken auf der Diagonalen definiert, $n_k = dim \mathscr{G}_k$, dass $\begin{pmatrix} ad_x^{(1)} & * \\ 0 & ad_x^{(m)} \end{pmatrix}$. $*$ repräsentiert hierbei eine rechteckige Matrix. Die Diagonalblöcke $ad_x^{(k)}$ sind die Komponenten der adjungierten Darstellung.

Definition 3.3.5. *Eine Lie-Algebra $\mathscr{G}$ heißt **nilpotent**, falls $ad_x^{(k)} = 0$ für $k = 1, ..., m$, $x \in \mathscr{G}$.*

In diesem Fall lassen sich alle ad_x auf Dreiecksform mit Nullen auf der Diagonalen bringen.

Über die adjungierte Darstellung lässt sich mit folgender symmetrischer Bilinearform ein weiteres wichtiges Objekt einführen:

Definition 3.3.6. *Die **Killing-Form** K ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} K : \mathscr{G} \times \mathscr{G} &\to \mathbb{F}, \\ (x, y) &\mapsto K(x, y) := Sp\,(ad_x \circ ad_y) \end{aligned} \tag{3.42}$$

Weil die Spur zyklisch ist, gilt $K(x, y) = K(y, x)$ und $K([x, y], z) = K(x, [y, z])$. Ausgewertet auf Basisvektoren $\{x_i\}_{i=1,...,d=dim\mathscr{G}}$ von $\mathscr{G}$ schreibt sich K mit Strukturkonstanten von $\mathscr{G}$ als

$$K_{ij} = Sp(ad_{x_i} \circ ad_{x_j}) = \sum_{l,k=1}^{d} f_{il}^k f_{jk}^l. \tag{3.43}$$

Definition 3.3.7. *K heißt **nicht-ausgeartet** genau dann, wenn aus $K(x, y) = 0\ \forall y \in \mathscr{G}$ folgt, dass $x = 0$.*

Theorem 3.3.8 (Cartan)**.** *Eine Lie-Algebra ist halb-einfach $\Leftrightarrow$ K ist nicht-ausgeartet, das heißt, $\det K \neq 0$.*

Im Falle einer nicht-ausgearteten Killing-Form lassen sich mit den K_{ij} die Indizes der Strukturkonstanten hoch- und runterziehen,

$$f_{ijk} = \sum_l K_{il} f_{jk}^l. \tag{3.44}$$

Unter Ausnutzung der Jacobi-Identität ergibt sich

$$f_{ijk} = \sum_{lmn} f_{in}^m f_{lm}^n = \sum_{lmn} (f_{in}^m f_{jl}^n f_{km}^l + f_{ni}^m f_{mj}^l f_{lk}^n). \tag{3.45}$$

Folglich sind die Strukturkonstanten total antisymmetrisch unter Vertauschung ihrer Indizes. Für halb-einfache Lie-Algebren exisitiert das Inverse $K_{ij}^{-1} = K^{ij}$ (siehe dazu auch Kapitel 3.5.2). Es ist also

$$f^i_{jk} = \sum_l K^{il} f_{ljk} \tag{3.46}$$

für halb-einfache Lie-Algebren.

Während auf einer Lie-Algebra $\mathscr{G}$ nur das Lie-Produkt, nicht aber das einfache Produkt definiert ist, lässt sich für zwei Elemente der Darstellung von $\mathscr{G}$ ein solches über den Casimir-Operator angeben:

Definition 3.3.9. *Der **Casimir-Operator** C ist gegeben durch*

$$C = \sum_{i,j=1}^{d} K^{ij} x_i x_j. \tag{3.47}$$

Hierbei bezeichnet d die Dimension von $\mathscr{G}$ und K^{ij} das Inverse der Killing-Form bezüglich einer Basis $\{x_i\}$.

Für höhere Ordnungen n lässt sich dies schreiben als

$$C_n = \sum f^{j_2}_{i_1 j_1} f^{j_3}_{i_2 j_2} ... K^{i_1 l_1} K^{i_2 l_2} ... K^{i_n l_n} x_{l_1} x_{l_2} ... x_{l_n}. \tag{3.48}$$

Definition 3.3.10. *Eine Lie-Algebra ist **kompakt** $\Leftrightarrow$ K ist negativ definit.*

Halb-einfache Lie-Algebren sind kompakt. Komplexe Lie-Algebren sind nicht-kompakt.

3.4 Vektorwertige Formen

Definition 3.4.1. *Sei M eine Mannigfaltigkeit und V ein reeller Vektorraum. Dann bezeichnet*

$$\Lambda^k_m(M, V) := V \otimes \Lambda^k_m(M) \tag{3.49}$$

*die **Menge der V-wertigen k-Formen** am Punkt $m \in M$. Sei $v \in V, \alpha \in S\Lambda^k(M)$, dann ist $A = v \otimes \alpha \in S\Lambda^k(M, V)$.*

Definition 3.4.2. *Die **äußere Ableitung** d ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} d : S\Lambda^k(M, V) &\to S\Lambda^{k+1}(M, V), \\ d\,(v \otimes \alpha) &:= v \otimes d\alpha. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Sei nun speziell $V = \mathscr{G}$. Dann ist

$$\Lambda_m(M, \mathscr{G}) := \bigoplus_{k=0}^{dim M} \Lambda^k_m(M, \mathscr{G}) \tag{3.51}$$

mit dem **äußeren Produkt** $\dot{\wedge}$,

$$\begin{aligned}\dot{\wedge}:\Lambda^k_m(M,\mathscr{G})\times\Lambda^l_m(M,\mathscr{G})&\to\Lambda^{k+l}_m(M,\mathscr{G})\\ (\varphi,\psi)&\mapsto\varphi\dot{\wedge}\psi:=[x,y]\otimes\alpha\wedge\beta\end{aligned}\tag{3.52}$$

für $\varphi=x\otimes\alpha\in\Lambda^k_m(M,\mathscr{G}),\psi=y\otimes\beta\in\Lambda^l_m(M,\mathscr{G})$.

Bemerkung 3.4.3. Es ist

$$(\alpha\otimes x)\,(X_1,...,X_k)=\alpha(X_1,...,X_k)x\ \text{für}X_1,...,X_k\in T_yM.\tag{3.53}$$

Sei $E_1,...,E_n$ eine Basis von $\mathscr{G}$ mit $[E_a,E_b]=f^c_{ab}E_c$. In dieser Basis ist dann $\varphi=\varphi^a\otimes E_a$ bzw. $\psi=\psi^b\otimes E_b$. Damit ist

$$[\varphi,\psi]=\left(\varphi^a\wedge\psi^b\right)\otimes[E_a,E_b]=f^c_{ab}\left(\varphi^a\wedge\psi^b\right)\otimes E_c.\tag{3.54}$$

Für $\varphi\in S\Lambda^k(M,\mathscr{G}),\psi\in S\Lambda^l(M,\mathscr{G}),\chi\in S\Lambda^n(M,\mathscr{G})$ gilt

$$\begin{aligned}d(\varphi\dot{\wedge}\psi)&=d\varphi\dot{\wedge}\psi+(-1)^k\varphi\dot{\wedge}d\psi,\\ \varphi\dot{\wedge}\psi&=-(-1)^{kl}\psi\dot{\wedge}\varphi,\\ 0&=(-1)^{kn}(\varphi\dot{\wedge}\phi)\dot{\wedge}\chi+(-1)^{lk}(\psi\dot{\wedge}\chi)\dot{\wedge}\varphi+(-1)^{nk}(\chi\dot{\wedge}\varphi)\dot{\wedge}\psi.\end{aligned}\tag{3.55}$$

Die Lie-Algebra der $\mathscr{G}$-wertigen Formen ist also eine ***graduierte Lie-Algebra***.

3.5 Charakterisierung (halb-)einfacher Lie-Algebren

Im Folgenden sei, wenn nicht ausdrücklich anders erklärt, $(x,y):=K(x,y)=Sp(ad_x\circ ad_y)$ für Lie-Algebren $\mathscr{G}_1\ni x,\mathscr{G}_2\ni y$.

3.5.1 Fitting-Zerlegung

Definition 3.5.1. *Sei $\mathscr{G}$ eine lineare Lie-Algebra auf einem Raum V. Das **Gewicht** λ auf $\mathscr{G}$ ist eine Funktion $\lambda=\lambda(x),x\in\mathscr{G}$, mit*

$$xv=\lambda(x)v\tag{3.56}$$

*für $v\in V,v\neq0$. Der **Raum der Gewichte** V_λ auf $\mathscr{G}$ bezüglich λ ist*

$$V_\lambda:=\{v|v\in V,(x-\lambda(x))^nv=0,n=1,2,...,x\in\mathscr{G}\}.\tag{3.57}$$

Offensichtlich ist $\lambda(x)$ eine Linearform auf $\mathscr{G}$. Es sei $V_\lambda=\{0\}$, falls λ kein Gewicht von $\mathscr{G}$ ist.

Theorem 3.5.2. *Falls $\mathscr{G}$ nilpotent, dann lässt sich V als direkte Summe über die Gewichte λ von $\mathscr{G}$ schreiben,*

$$V=\sum_\lambda V_\lambda.\tag{3.58}$$

Definition 3.5.3. *Sei $\mathscr{G}$ eine Lie-Algebra, $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{G}$ nilpotente Subalgebra von $\mathscr{G}$ und $\hat{\mathscr{N}} = \{\hat{x} : x \in \mathscr{N}\}$, wobei $\hat{x} := ad_x$. Die* ***Fitting-Zerlegung*** *von $\mathscr{G}$ bezüglich $\mathscr{N}$ ist gegeben durch die direkte Summe*

$$\mathscr{G} = \sum_\alpha \mathscr{G}_\alpha, \tag{3.59}$$

wobei $\alpha = \alpha(x)$ ein Gewicht auf $\mathscr{N}$ ist. α heißt ***Wurzel****, $\mathscr{G}_\alpha$* ***Unterraum der Wurzelvektoren*** *von $\mathscr{G}$.*

Theorem 3.5.4. *Die Fitting-Zerlegung hat folgende Eigenschaften:*

(F1) $[\mathscr{G}_\alpha, \mathscr{G}_\beta] \subset \mathscr{G}_{\alpha+\beta}$

(F2) $[\mathscr{G}_0, \mathscr{G}_\alpha] \subset \mathscr{G}_\alpha, [\mathscr{G}_0, \mathscr{G}_0] \subset \mathscr{G}_0$

(F3) $\mathscr{N} \subset \mathscr{G}_0$

Wegen *(F2)* ist $\mathscr{G}_{\alpha=0}$ also Subalgebra von $\mathscr{G}$ und jedes $\mathscr{G}_\alpha$ invariant unter $\mathscr{G}_0$.

Definition 3.5.5. *Die Fitting-Zerlegung heißt* ***regulär*** *(mit $\mathscr{N} = \mathscr{G}_0$), falls $\mathscr{N}$* ***reguläre Subalgebra*** *von $\mathscr{G}$ ist: Ein Element $h \in \mathscr{G}$ heißt regulär, wenn es einen Eigenwert 0 von kleinstmöglicher Multiplizität auf $\mathscr{G}$ hat. Für ein reguläres Element h heißt $\mathscr{N}$ regulär, wenn es die die größtmögliche Subalgebra ist, die h enthält.*

Theorem 3.5.6. *Jede Lie-Algebra hat eine reguläre Fitting-Zerlegung der Form*

$$\mathscr{G} = \mathscr{N} \oplus \sum_\alpha \mathscr{G}_\alpha. \tag{3.60}$$

Mit diesen vorbereitenden Definitionen lassen sich nun kompakte Lie-Algebren charakterisieren. Vor allem halb-einfache Lie-Algebren sind in diesem Zusammenhang in der Physik von Interesse. Insbesondere gilt es, eine Basis für diese zu finden:

3.5.2 Cartan-Weyl-Basis

Definition 3.5.7. *Sei $\mathscr{G}$ eine halbeinfache Lie-Algebra mit $h \in \mathscr{G}$ regulär. Sei $\mathscr{H}_0$ eine maximal kommutative Subalgebra von $\mathscr{G}$, die h enthält. Dann heißt $\mathscr{H}$* **Cartan-Subalgebra** *von $\mathscr{G}$.*

Theorem 3.5.8. *Falls $\mathscr{G}$ eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra ist, dann lässt sich die adjungierte Darstellung ad_h für alle $h \in \mathscr{H}$ in einer gemeinsamen Basis von $\mathscr{G}$ diagonalisieren.*

Die Fitting-Zerlegung von $\mathscr{G}$ bezüglich $\mathscr{H}$, $\mathscr{G} = \mathscr{G}_0 + \sum_{\alpha\neq 0} \mathscr{G}_\alpha$, $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}_0$, schreibt sich damit als

$$\mathscr{G} = \mathscr{H} \oplus \sum_{\alpha\neq 0} \mathscr{G}_\alpha, \tag{3.61}$$

denn $[h, x_0] = 0 \forall h \in \mathscr{H}, x_0 \in \mathscr{G}_0$, also $\mathscr{H} = \mathscr{G}_0$, weil $\mathscr{H}$ maximal ist. α ist ein lineares Funktional auf $\mathscr{G}$, $\alpha \in \mathscr{H}^*$. Es gilt:

(F4) Falls $\beta \neq -\alpha$, dann $\mathscr{G}_\alpha \perp \mathscr{G}_\beta$.

(F5) Die Killing-Form K ist nicht-singulär auf $(\mathscr{G}_{-\alpha}, \mathscr{G}_\alpha)$.

(F6) $dim(\mathscr{G}_\alpha) = dim(\mathscr{G}_{-\alpha})$.

Aus *(F4)* und *(F5)* folgt außerdem, dass $\mathscr{G}_0 = \mathscr{H}$ orthogonal zu allen $\mathscr{G}_{\alpha,\alpha\neq 0}$ und die Killing-Form nicht-singulär auf $\mathscr{H}$ ist.

Wegen *(F6)* ist mit α auch $-\alpha$ existierende Wurzel. Die Menge der Wurzeln lässt sich also in ***positive*** und ***negative Wurzeln*** einteilen. Eine Wurzel $\alpha(h) = \alpha_1 h_1 + ... + \alpha_m h_m$ heißt positiv(negativ), $\alpha > 0 (\alpha < 0)$, wenn die erste nicht verschwindende Komponente $\alpha_i, 1 \leq i \leq m, \frac{m}{2} = dim_{\mathbb{C}}\mathscr{H}$, bezüglich einer Basis $h_1, ..., h_m$ positiv(negativ) ist. $h_1, ..., h_m$ sind hierbei reelle Koordinaten von $h \in \mathscr{H}$. Es ist also $\mathscr{G}_+ := \sum_{\alpha>0} \mathscr{G}_\alpha,\ \mathscr{G}_- := \sum_{\alpha>0} \mathscr{G}_{-\alpha},\ \mathscr{H} = \mathscr{G}_0$ und damit

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_- \oplus \mathscr{H} \oplus \mathscr{G}_+. \tag{3.62}$$

Eine Basis von ganz $\mathscr{G}$ lässt sich nun aus Elementen $h \in \mathscr{H}$ und Wurzelvektoren $e_\alpha \in \mathscr{G}_\alpha,\ \alpha \neq 0$, konstruieren und heißt ***Cartan-Weyl-Basis***.

Theorem 3.5.9. *Sei $\mathscr{G}$ eine halb-einfache komplexe Lie-Algebra. Ihre Cartan-Weyl-Basis hat folgende Eigenschaften:*

(C1) $dim(\mathscr{G}_\alpha, \alpha \neq 0) = 1\ \forall \alpha$

(C2) $\Theta := span\{e_\alpha, e_{-\alpha}, [e_\alpha, e_{-\alpha}]\} \cong sl(2, \mathbb{C})$ *mit* $e_\alpha \in \mathscr{G}_\alpha, e_{-\alpha} \in \mathscr{G}_{-\alpha}, (e_\alpha, e_{-\alpha}) \neq 0$. Θ *ist dreidimensionale Unteralgebra von* $\mathscr{G}$.

(C3) Für $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$ *ist* $\alpha(h_i) := \alpha_i = ([e_\alpha, e_{-\alpha}], h_i)\ \forall h_i \in \mathscr{H}$.

(C4) Die einzigen existierenden Vielfachen von α *sind* $\pm\alpha, 0$. *Für* $\alpha \neq 0$ *ist* $(\alpha, \alpha) \neq 0$.

(C5) $[h_i, h_j] = 0$
$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = K_{\alpha,-\alpha} h_\alpha$
$[h_i, e_\alpha] = \alpha_i e_\alpha$
$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta} \begin{cases} = 0 \text{ falls } \alpha + \beta \text{ keine Wurzel} \\ \neq 0 \text{ falls } \alpha + \beta \text{ Wurzel} \end{cases}$$

Hierbei bezeichnen die Indizes $i, j, k, ...$ Generatoren von $\mathscr{H}$. Es ist

$$h_\alpha = \sum_{i,j} \alpha_i K^{ij} h_j \tag{3.63}$$

das zu α vermittels K assoziierte Element aus $\mathscr{H}$.

Der Proportionalitätsfaktor $N_{\alpha\beta}$ hängt von der Normierung der Wurzelvektoren ab und e_0 ist ein Element der Cartan-Subalgebra.

Für die Komponenten der Killing-Form gilt wegen (3.43)

$$K_{A\alpha} = \sum_{CD} f^D_{AC} f^C_{\alpha D} = \sum_{\gamma\beta} f^\gamma_{A\beta} f^\beta_{\alpha\gamma} + \sum_{i\beta} f^i_{A\beta} f^\beta_{\alpha i} \sum_{\beta i} f^\beta_{Ai} f^i_{\alpha\beta} + \sum_{ji} f^j_{Ai} f^i_{\alpha j}, \tag{3.64}$$

wobei dabei neben $i, j, k, ...$ für Generatoren von $\mathscr{H}$ mit $\alpha, \beta, \gamma, ...$ Generatoren von $\mathscr{G}/\mathscr{H}$ sowie mit $A, B, C, ...$ Generatoren von $\mathscr{G}$ bezeichnet sein sollen. Wegen *(C5)* führt dies auf

$$K_{A\alpha} \propto \delta_{A+\alpha,0}. \tag{3.65}$$

Für halbeinfache Lie-Algebren muss also mit α auch $-\alpha$ Wurzel sein, da sonst $det\ K = 0$, was im Widerspruch zur Halbeinfachheit steht.

Jede Wurzel α lässt sich eindeutig mit einem Element $h_\alpha \in \mathscr{H}$ identifizieren: Für $\alpha \in \mathscr{H}^*$ mit Komponenten $\{\alpha_i\}$ ist $\alpha_i = K_{\alpha i} = Sp\,(ad(h_\alpha) \circ ad(h_i))$. In Basisschreibweise, $h_\alpha = \sum \lambda_i^{(\alpha)} h_i$, ist dann

$$\begin{aligned} \alpha_i = K_{\alpha i} &= Sp\left(ad(\sum \lambda_i^{(\alpha)} h_i) \circ ad(h_j)\right) \\ &= \sum \lambda_i^{(\alpha)} Sp\,(ad(h_i) \circ ad(h_j)) = \sum \lambda_i^{(\alpha)} K_{ij}, \end{aligned}$$

also $\lambda_i^{(\alpha)} = \sum \alpha_i K^{ji}$, was auf (3.63) führt.

Wegen (3.65) ist außerdem $K_{\alpha,-\alpha} \neq 0$ und $\det(K_{ij}) \neq 0$. Daher ist das Inverse von K wohldefiniert. Mit $K_{ij}^{-1} = K^{ij}$ kann nun ein Skalarprodukt auf dem Raum der Wurzeln $\mathscr{H}^*$ definiert werden gemäß

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{i,j=1}^{dim \mathscr{H}} \alpha_i K^{ij} \beta_j. \tag{3.66}$$

Es gilt

$$K_{ij} = \sum_{\alpha} \alpha_i \cdot \alpha_j. \tag{3.67}$$

3.5.3 Einfache Wurzeln und die Cartansche Struktur-Matrix

Theorem 3.5.10. *Sei $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ Cartan-Subalgebra mit Rang r, das heißt dim $\mathscr{H} = r$. Dann gibt r die Anzahl der linear unabhängigen Wurzeln in $\mathscr{H}$ an.*

Theorem 3.5.11. *Sei $\mathscr{H}_0^*$ die reelle lineare Hülle des Wurzelsystems. Dann ist K positiv definit auf $\mathscr{H}_0$ und (α, β) rational für jedes Paar α, β.*

Definition 3.5.12. *Sei α eine positive Wurzel. α heißt **einfach**, wenn sie sich nicht als Summe zweier positiver Wurzeln schreiben lässt.*

Die Menge der einfachen Wurzeln $\Pi := \{\alpha_i\}_{i=1,...,r}$ bildet eine Basis von $\mathscr{H}$; jede beliebige Wurzel lässt sich damit schreiben als $\sum_{i=1}^r m_i \alpha_i$ mit $m_i \in \mathbb{Z}$ entweder rein positiv oder rein negativ. Die Menge Δ aller nichtnegativen Wurzeln ist eindeutig durch Π bestimmt. Insbesondere ist jede positive Wurzel entweder einfach oder die Summe einer einfachen und einer positiven Wurzel. Ferner gilt $\phi := \sphericalangle(\alpha_i, \alpha_j) \geq 90°$ für zwei einfache Wurzeln α_i, α_j.

Auf diese Weise kann jede existierende Wurzel sukzessive konstruiert werden. Zu diesem Zweck ist die sogenannte ***Cartansche Struktur-Matrix*** $(c_{ij})_{1\leq i,j\leq r}$ mit Einträgen $c_{ij} = \frac{2\alpha_i\cdot\alpha_j}{\alpha_j\cdot\alpha_j} \in \mathbb{Z}, \alpha_i, \alpha_j \in \Pi$ nützlich, mit dem in (3.66) vermittels des Inversen der Killing-Form definierten Skalarprodukt auf $\mathscr{H}^*$. Die Cartansche Struktur-Matrix beschreibt die Π zugrundeliegende Geometrie, also Längen $\alpha_i \cdot \alpha_i$ der Wurzeln und deren paarweise eingeschlossene Winkel,

$$c_{ij}c_{ji} = \frac{4(\alpha_i \cdot \alpha_j)^2}{(\alpha_i \cdot \alpha_i)(\alpha_j \cdot \alpha_j)} = 4\cos^2\theta_{ij} = \{0, 1, 2, 3\}, \tag{3.68}$$

für $\alpha_i \neq \alpha_j$. Die einzig möglichen stumpfen Winkel zwischen zwei einfachen Wurzeln sind demnach $90°, 120°, 135°, 150°$. Die Geometrie des aufspannenden Systems einfacher Wurzeln wird in sogenannten ***Dynkin-Diagrammen*** dargestellt. Hierbei wird die Menge von r Wurzeln durch r Kreise mit $n_{ij} = c_{ij}c_{ji}$ Verbindungslinien symbolisiert. Ein solches Dynkin-Diagramm mit $n_{ij} \neq 0$ heißt ***zusammenhängend*** und charakterisiert eine einfache Lie-Algebra. Die Dynkin-Diagramme halb-einfacher Lie-Algebren zerfallen entsprechend ihrer Zerlegung in zusammenhängende Diagramme für die jeweiligen einfachen Lie-Algebren. Halbeinfache Lie-Algebren mit identischer Cartan-Matrix sind zueinander isomorph.

Definition 3.5.13. *Für irgendeine Wurzel γ und eine einfache Wurzel α^i ist mit*

$$\Delta_i := \frac{2\gamma \cdot \alpha_i}{\alpha_i \cdot \alpha_i} \tag{3.69}$$

*der sogenannte **Dynkin-Index** definiert.*

Falls γ einfach ist, entspricht der Dynkin-Index gerade $(c_{i1}, ..., c_{ir})$. Die Reihen der Cartanschen Struktur-Matrix geben also die Dynkin-Indizes der einfachen Wurzeln an.

Ausgehend von den Dynkin-Indizes können alle anderen existierenden Wurzeln konstruiert werden: Da es insbesondere nur eine endliche Anzahl von Wurzeln gibt, kann jede Wurzel γ als Teil eines ***α-Strings*** R_α von Wurzeln aufgefasst werden,

$$\gamma - m\alpha, ..., \gamma, ..., \gamma + p\alpha, \tag{3.70}$$

wobei $m, p \geq 0$ ganzzahlig. Seien $\beta = \gamma + p\alpha$ und $\beta - M\alpha$ das Maximum bzw. Minimum von R_α. Man kann zeigen, dass

$$M = \frac{2\alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \alpha}. \tag{3.71}$$

Damit ergibt sich

$$m + p = \frac{2\alpha(\gamma + p\alpha)}{\alpha \cdot \alpha} = \frac{2\alpha \cdot \gamma}{\alpha \cdot \alpha}, \tag{3.72}$$

also ist

$$m - p = \frac{2\alpha \cdot \gamma}{\alpha \cdot \alpha} \in \mathbb{Z}. \tag{3.73}$$

Jede positive Wurzel ρ ist gegeben durch

$$\rho = \sum_i k_i\alpha_i \tag{3.74}$$

mit $k_i \in \mathbb{Z}$ nichtnegativ, $\alpha_i \in \Pi$ und $k = \sum k_i$ ***Level*** von ρ. Es gilt für ρ, dass

$$\Delta_i = \frac{2\rho \cdot \alpha_i}{\alpha_i \cdot \alpha_i} = \frac{2\sum_i k_i \alpha_i}{\alpha_i \cdot \alpha_i} = \sum_j c_{ij}\alpha_i. \tag{3.75}$$

Die Erzeugung einer neuen Wurzel aus ρ durch Addition einer einfachen Wurzel α_l führt auf eine Erhöhung des Levels um 1. Der Dynkin-Index der so erzeugten Wurzel ergibt sich aus der Summe des Dynkin-Index der beiden addierten Wurzeln. Welche einfache Wurzel auf einem bestimmten Level addiert werden kann, ergibt sich aus (3.73): Es ist $\Delta = m - p$, wobei sich mögliche m unmittelbar aus der Beschaffenheit der Wurzel auf dem Level k ergeben. Es können nur einfache Wurzeln addiert werden, falls $p > 0$. Auf diese Weise können bei gegebenem Δ und m auf jedem Level k Wurzeln des Levels $k + 1$ gebildet werden bis mit $p \leq 0$ das Maximum von R_α erreicht ist.

3.5.4 Irreduzible Δ_i^Λ-Darstellungen

Nach der entsprechenden Definition in Kapitel 3.3 gelten die Relationen *(C5)* für halbeinfache Lie-Algebren auch für deren Darstellungen $\dot{\rho}(\mathscr{G})$:

Definition 3.5.14. *Sei im Folgenden mit $\{H_i, E_\alpha\}$ die auf einem Vektorraum V dargestellte Basis von $\mathscr{G} = LH\{h_i, e_\alpha\}$ bezeichnet und $\Phi^a \in V$. Dann ist*

$$H\Phi^a = \left(\sum_i c_i \lambda^i\right) \Phi^a \equiv M^a(h)\Phi^a \tag{3.76}$$

für $h = \sum_i c_i h_i \in \mathscr{H}, H = \sum_i c_i H_i$ und λ_i^a Eigenwerte von H_i. M^a sind lineare Funktionale auf H, $M^a \in \mathscr{H}^*$, und heißen ***Gewichte der Darstellung****. Φ^a sind die Eigenvektoren bezüglich der Gewichte.*

Insbesondere ist ein Gewicht λ auf $\mathscr{G}$ Gewicht einer Darstellung, wenn sein zugehöriger Gewichtsraum V_λ ungleich Null ist. Weiter ist (analog *(C5)*)

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= H_\alpha \end{aligned} \tag{3.77}$$

für $K_{\alpha,-\alpha} = 1$.

Analog zu Kapitel 3.5.3 generieren $E_\alpha, E_{-\alpha}$ von einem Gewicht M ausgehend nun als Auf-und Absteigeoperatoren den String W_α von Gewichten

$$\Lambda \equiv M + p\alpha, ..., M, ..., M - m\alpha. \tag{3.78}$$

Vom Startpunkt Λ aus, dem höchsten Gewicht des Strings mit Dynkin-Index $\Delta_i^\Lambda = \frac{2\Lambda \cdot \alpha_i}{\alpha_i \cdot \alpha_i}$ und $p = k = 0$, können also analog dem Verfahren in 3.5.3 alle anderen Gewichte

$$\Lambda - \sum_i k_i \alpha_i, \ \sum_i k_i = k, \tag{3.79}$$

erzeugt werden. Auf jedem Level k werden bei bekanntem p nun für $m_i = p_i + \Delta_i$ so lange einfache Wurzeln α_i subtrahiert bis $m = 0$. Die auf diese Weise durch all ihre Gewichte charakterisierte irreduzible Darstellung von $\mathscr{G}$ wird durch den Dynkin-Index von Λ bezeichnet. Es ist sofort ersichtlich, dass die Wurzeln in 3.5.3 nichts anderes als die Gewichte der adjungierten Darstellung sind.

Analog zu den Wurzeln kann auch jedes Gewicht M mit

$$\Delta_i^M = \frac{2M \cdot \alpha_i}{\alpha_i \cdot \alpha_i} = \sum_j a_j c_{ji} \tag{3.80}$$

als Linearkombination einfacher Wurzeln geschrieben werden mit Koeffizienten $\{a_i\}$:

$$M = \sum_i a_i \alpha_i = \sum_{ij} \Delta_i^M \left(c^{-1}\right)_{ij} \alpha_j \tag{3.81}$$

Das Skalarprodukt zweier Gewichte M, N lässt sich also direkt über die Dynkin-Indizes ausdrücken, $M \cdot N = \sum_{i,j} \Delta_i^M (c^{-1})_{ij} \cdot \Delta_j^N \alpha^{(j)} \alpha^{(j)}/2$.

Ist das höchste Gewicht Λ einer irreduziblen Darstellung bekannt, dann lässt sich diese weiter über den Eigenwert c_Λ des Casimir-Operator charakterisieren: Für eine halbeinfache Lie-Algebra $\mathscr{G}$, $dim\mathscr{G} = d$, mit Generatoren $I_A, I_B, I_C, ...$ ist der Casimir-Operator C gegeben durch $C = \sum_{A,B=1}^d K^{AB} I_A I_B$ oder, in einer Cartan-Weyl Basis, $C = \sum_{i,j=1}^l K^{ij} H_i H_j + \sum_{\alpha>0} \left(E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha} E_\alpha\right)/K_{\alpha,-\alpha}$. Man kann nun leicht zeigen, dass der Eigenwert c_Λ von C gegeben ist durch

$$c_\Lambda = (\Lambda + 2\delta)\Lambda = \sum \left(\Delta_i^\Lambda + 2\right)(c^{-1})_{ij} \Delta_j^\Lambda (\alpha_j \cdot \alpha_j)/2, \;\; \delta = \sum_{\alpha>0} \alpha/2. \tag{3.82}$$

Mit bekanntem c_Λ lässt sich die Dimension d_M des Raumes der Gewichte und weiter die Dimension d_Λ der irreduziblen Darstellung bestimmen (siehe dazu ausführlicher [29], [31]): Es ist

$$d_\Lambda = \prod_{\alpha>0} \frac{1 + \sum_i k_i^\alpha \Delta_i^\Lambda \alpha_i \cdot \alpha_i}{\sum_i k_i^\alpha \alpha_i \cdot \alpha_i} \tag{3.83}$$

mit positiven Wurzeln $\alpha = \sum_i k_i^{(\alpha)} \alpha^{(i)}$, einfachen Wurzeln $\alpha^{(i)}$, Dynkin-Indizes Δ_i^Λ und nicht-negativen ganzen Zahlen $k_i^{(\alpha)}$.

Laut (3.28) lässt sich jedes Element g der zu $\mathscr{G}$ gehörigen Lie-Gruppe G schreiben als $g = \exp(tx)$ für $t \in \mathbb{R}$, wobei x Erzeugende von $\mathscr{G}$ bezeichnet. Da diese Relation gleichermaßen für irreduzible $\rho(G)$ und $\dot{\rho}(\mathscr{G})$ gilt, werden meist von vornherein Darstellungen betrachtet, zumal physikalische Ausgangssituationen durch die Festlegung von Δ_i^Λ und damit durch die Wahl der Darstellung konkret vorgegeben werden können.

3.6 Die Klassischen Lie-Gruppen

Es seien $GL(n,\mathbb{K})$ und $SL(n,\mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$ die Gruppe der komplexen oder reellen $n \times n$ Matrizen mit Determinante $\neq 0$ bzw. Determinante 1. $\mathbb{H}$ bezeichnet hierbei die Algebra der Quaternionen über $\mathbb{R}$. [1]

Die klassischen Lie-Gruppen definieren sich jeweils als Untergruppen von $GL(n,\mathbb{K})$ oder $SL(n,\mathbb{K})$ mit der zusätzlichen Bedingung, dass die enthaltenden Elemente zusätzlich die hermitesche, quadratische oder äußere Form invariant lassen mögen:

Definition 3.6.1. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$, $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n, x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist*

(F1) Hermitesche Form H
$H : V \times V \to \mathbb{C}, H(z,z) =: \langle z,z\rangle_H = -\sum_{i=1}^{p} z_i\bar{z}_i + \sum_{i=p+1}^{n} z_i\bar{z}_i$,
wobei H sesquilinear und $\langle z,w\rangle_H = \overline{\langle w,z\rangle}_H \forall z,w \in V$

(F2) Quadratische Form q
$q : V \times V \to \mathbb{R}, q(x,x) =: \langle x,x\rangle_q = -\sum_{i=1}^{p} x_i^2 + \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2$,
mit q bilinear, symmetrisch (antisymmetrisch) falls $\langle x,y\rangle_q = (-)\langle y,x\rangle_q$, alternierend falls $\langle x,x\rangle_q = 0\ \forall x,y \in V$

(F3) Äußere Form s
$s : V \times V \to \Lambda^2(V), s(x,x) =: \langle x,x\rangle_s = \sum_{i=1}^{n} x_i \wedge x_{n+i}$

Definition 3.6.2. *Es bezeichne $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ eine Matrix mit Transponiertem A^T und Konjugiertem $\bar{A}$, I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix und*

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},\ I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix},\ K_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix}. \tag{3.85}$$

Dann sind mit

(K1) $U(p,q) = \{A \in GL(p+q,\mathbb{C}) | A^T I_{p,q} \bar{A} = I_{p,q}\}$

(K2) $U(n) = U(0,n) = U(n,0)$

(K3a) $SO(n,\mathbb{C}) = \{A \in SL(n,\mathbb{C}) | A^T A = I_n\}$

(K3b) $SO(p,q) = \{A \in SL(p+q,\mathbb{R}) | A^T I_{p,q} A = I_{p,q}\}$

(K4a) $Sp(n,\mathbb{F}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{F}) | A^T J_n A = J_n\}$ *mit* $F = \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$

(K4b) $Sp(p,q) = \{A \in Sp(p+q,\mathbb{C}) | A^T K_{p,q} \bar{A}\}$

[1] Für ein $q \in \mathbb{H}$ ist $q = q^0 a_0 + q^1 a_1 + q^2 a_2 + q^3 a_3$ mit $q^k \in \mathbb{R}$, $k = 1,2,3$, in einer Basis $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$. $q^0 a_0$ heißt der Realteil, $q^1 a_1 + q^2 a_2 + q^3 a_3$ der Imaginärteil von q. Die Konjugation ist gegeben durch $\bar{a}_0 = a_0, \bar{a}_k = -a_k$. Es gelten die Relationen

$$a_0 a_k = a_k a_0 = a_k,\ a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = -a_0^2,\ a_i = \epsilon_{ijk} a_j a_k. \tag{3.84}$$

$\mathbb{H}$ ist ein Schiefkörper mit Einselement a_0 und zu $q \in \mathbb{H}$ inversem Element $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$, wobei $|q| := \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$.

(K4c) $Sp(n) = Sp(0,n) = Sp(n,0)$

die klassischen (einfachen) Lie-Gruppen G gegeben.

Es lässt also $SU(n,\mathbb{C})$ die hermitesche, $SO(n,\mathbb{C})$ die quadratische und $Sp(n,\mathbb{F})$ die äußere Form invariant (siehe dazu sowie zu Strukturen allgemeiner Kapitel 5).

$Sp(2n,\mathbb{F})$ heißt symplektische Gruppe; $Sp(n)$ ist die kompakte symplektische Gruppe, auch bekannt als unitäre symplektische Gruppe. Sie lässt die hermitesche Form auf $\mathbb{H}$ invariant, $Sp(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{H}) | A^\dagger A = I_n\}$, entspricht also der unitären quaternionischen Gruppe $U(n,\mathbb{H})$.

Lemma 3.6.3. *Es ist*

$$\begin{aligned}
SU(p,q) &= U(p,q) \cap SL(p+q,\mathbb{C}),\\
SU(n) &= U(n) \cap SL(n,\mathbb{C}),\\
Sp(n) &= Sp(n,\mathbb{C}) \cap U(2n),\\
U(n) &\cong SO(2n) \cap Sp(n),\\
Sp(p,q) \cap U(2p+2q) &\cong Sp(p) \times Sp(q),\\
Sp(n,\mathbb{R}) \cap U(2n) &\cong U(n).
\end{aligned}$$

Die zu einer klassischen Lie-Gruppe gehörige Lie-Algebra wird im Folgenden in Fraktur bezeichnet, also zum Beispiel $Lie(SU(n)) = \mathfrak{su}(n)$.

Kapitel 4

Prinzipalbündel

Prinzipalbündel (Hauptfaserbündel) bilden auf abstrakte Weise die Tatsache ab, dass physikalische Messungen nicht entkoppelt von ihrem jeweiligen Bezugssystem gedacht werden können. Sie stellen mit ihren sogenannten Eichtransformationen die verschiedenen Bezugssysteme miteinander in Relation. Der Zusammenhang eines Hauptfaserbündels ist zum Beispiel als Eichpotential aus der $U(1)$- Eichthorie des Elektromagnetismus bekannt. Seine äußere Ableitung beschreibt in diesem Fall die elektromagnetische Feldstärke. Beide Objekte existieren hier global, das heißt unabhängig von der Wahl des Bezugssystems bzw. der Eichung, was der Ladungserhaltung Rechnung trägt. Allgemein, wie zum Beispiel für den Fall der Kernkräfte, $SU(n), n \geq 2$, muss dies nicht so sein. Assoziierte Bündel stellen ausgehend von einem gegebenen Prinzipalbündel die Konstruktion eines Bündels dar, welches dieselben Übergangsfunktionen wie das grundlegende, jedoch von jenem verschiedene Fasern aufweist. Insbesondere im Kontext von Spinoren als Schnitte des sogenannten Spinorbündels spielen assoziierte Bündel eine wichtige Rolle.

Das folgende Kapitel soll eine Einführung in die Theorie der Hauptfaserbündel geben. Hierbei wird auch auf ihre Holonomiegruppen als Anschauung für die Krümmung des jeweiligen Zusammenhanges eingegangen, denn Mannigfaltigkeiten spezieller Holonomie werden im weiteren Kontext interessant sein. Das Material zu dieser Zusammenfassung findet sich in [30], [32], [33], [34], [35].

4.1 Definition

Definition 4.1.1. *Ein **Prinzipalbündel (auch Hauptfaserbündel)** ist ein 4-Tupel (P, π, M, G) bestehend aus einer glatten Mannigfaltigkeit P (**Totalraum**), einer Mannigfaltigkeit M (**Basis**), einer surjektiven Submersion π (**natürliche Projektion**),*

$$\pi : P \to M, \pi(p) = x, \tag{4.1}$$

*und einer kompakten Lie-Gruppe G (**Strukturgruppe** oder **Eichgruppe**). Ferner sei für alle $g \in G$ eine glatte und freie Rechtswirkung R_g gegeben, das heißt ein Diffeomorphismus*

$$R_g : P \times G \to P, (p, g) \mapsto pg \tag{4.2}$$

mit

(R1) $p(g_1g_2) = (pg_1)g_2 \ \forall p \in P, \forall g_1, g_2 \in G$,

(R2) für das Einselement $e \in G$ *ist* $pe = p \ \forall p \in P$,

(R3) falls $pg = p \ \forall p \in P, g \in G \Rightarrow g = e$.

Das Urbild von π *liefert für jeden Punkt* $p \in P$ *den zugehörigen Orbit von* G*, das heißt*

$$\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(\pi(p)) = \{pg : g \in G\}. \tag{4.3}$$

Dieser Orbit heißt ***Faser*** *über* x.

Jede Faser ist zwar diffeomorph zu G als Mannigfaltigkeit, weist aber keine natürliche Gruppenstruktur auf: Die Abbildung $A : G \to \pi^{-1}(x), g \mapsto pg$, die intuitiv geeignet scheint, $\pi^{-1}(x)$ mit einer Gruppenstruktur auszustatten, hängt von p ab. Somit kann durch A kein Einselement auf der gesamten Faser ausgezeichnet und folglich keine Gruppenstruktur übertragen werden. Dies wird aber durch folgende Abbildung geleistet:

Definition 4.1.2. *Die* ***lokale Trivialisierung*** *ist ein Diffeomorphismus*

$$T_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G, \tag{4.4}$$

wobei $x \in U \subset M$*, und*

$$\pi^{-1}(\pi(p)) \mapsto (\pi(p), s_U(p)) = T_U(p) \tag{4.5}$$

mit

$$s_U : \pi^{-1}(U) \to G, \ s_U(pg) = s_U(p)g \ \forall g \in G, p \in \pi^{-1}(U). \tag{4.6}$$

Diese hängt nicht mehr von p ab. Für alle Teilmengen $U, V, ... \subset M$ findet man lokale Trivialisierungen $T_U, T_V, ...$, welche physikalisch gesehen eine ***Wahl der Eichung*** für die jeweilige Untermenge der Basis repräsentieren.

Definition 4.1.3. *Jede lokale Trivialisierung definiert einen sogenannten* ***lokalen Schnitt***

$$\sigma : U \to P, \pi \circ \sigma = 1_U, \tag{4.7}$$

und umgekehrt. Für $U = M$ *heißt* σ ***globaler Schnitt****,* $T_{U=M}$ ***globale Trivialisierung****. Ein Prinzipalbündel mit einem solchen* T_M *heißt* ***trivial****. Die Menge der globalen Schnitte wird kurz mit* $\Gamma(P)$ *bezeichnet.*

Der Totalraum kann anschaulich durch das „Verkleben" von Produkten $(U \times G), (V \times G), ...$ konstruiert werden. Für $U \cap V \neq \emptyset$ ergibt sich unmittelbar die Forderung nach einer Vorschrift für den Wechsel zwischen zwei verschiedenen Eichwahlen, anschaulich für die Änderung des Bezugssystems. Dies leistet die sogenannte ***Übergangsfunktion*** g_{UV}:

Definition 4.1.4. *Angenommen, es seien mit*

$$T_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G \tag{4.8}$$

und

$$T_V : \pi^{-1}(V) \to V \times G \tag{4.9}$$

zwei lokale Trivialisierungen für zwei Faserstränge über U bzw. V gegeben, wobei U und V nicht disjunkt. Für $x \in U \cup V$ ist eine Übersetzungsvorschrift für die Eichwahl gegeben durch

$$g_{UV}(x) = s_U(p)s_V(p)^{-1}. \tag{4.10}$$

Diese gilt global für die gesamte Faser (da unabhängig von $p \in \pi^{-1}(x)$). Ferner gilt

(Ü1) $g_{UU}(y) = e \ \forall y \in U$,

(Ü2) $g_{UV}(y) = g_{UV}(y)^{-1} \ \forall y \in U \cap V$,

(Ü3) $g_{UV}(y)g_{VW}(y)g_{WU}(y) = e \ \forall y \in U \cap V \cap W$.

Allein aus Übergangsfunktionen, die (i)-(iii) genügen, kann das Bündel konstruiert werden.

4.2 Beispiele

Beispiel 4.2.1 (Hopf-Faserung)**.** Betrachte das G-Bündel (P, π, M) mit $P = S^3 = \{(w_1, w_2) : w_1^2 + w_2^2 = 1\}$, $G = U(1) = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = 1\}$ und $M = S^2 := \mathbb{C} \cup \infty$. Die Rechtswirkung von G auf P sei gegeben durch $(w_1, w_2)a = (w_1, w_2)a$. Sei ferner π definiert durch $\pi : S^3 \to S^2, (w_1, w_2) \mapsto \frac{w_1}{w_2}$. Da mit σ_1 und σ_2,

$$\sigma_1 : S^2 \backslash \{\infty\} \to S^3,\ \sigma_1(z) := \left(\frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \right),$$
$$\sigma_2 : S^2 \backslash \{0\} \to S^3,\ \sigma_2(z) := \left(\frac{|z|}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{|z|}{z\sqrt{1+|z|^2}} \right),$$

wobei $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $s_2(\infty) := (1, 0)$, zwei lokale Schnitte existieren, existiert auch eine lokale Trivialisierung. Folglich ist (S^3, π, S^2) ein $U(1)$-Prinzipalbündel.

Beispiel 4.2.2 (Reperbündel)**.** Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $L_xM := \{u \in Hom(\mathbb{R}^n, T_xM) : \text{u ist invertierbar}\}$ eine Basis für T_xM. Das G-Bündel $(L(M), \pi, M)$, $G = GL(n, \mathbb{R})$, mit $L(M) := \cup_{x \in M} L_xM$, der Projektion π,

$$\begin{aligned} \pi : L(M) &\to M, \\ \pi^{-1}(x) &= L_xM, \end{aligned} \tag{4.11}$$

und der freien Rechtswirkung R_A mit $A \in GL(n, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} R_A : L(M) \times G \to G, \\ (u, A) = u \circ A, u \in L(M), \end{aligned} \tag{4.12}$$

heißt Reperbündel. Es definiert

$$s(x) := D\varphi^{-1}_{\varphi(x)} : T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n \to T_x M \tag{4.13}$$

für eine Karte $\varphi : U \to \Omega$ von M einen Schnitt von $L(M)$. Die dazu korrespondierende Trivialisierung bestimmt einen differenzierbaren Atlas auf $L(M)$.

Beispiel 4.2.3 ($SO(n)$-Reperbündel)**.** Sei $(M, \langle , \rangle)$ eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Durch die Menge $SO(M)$ der positiv orientierten Orthonormalbasen aller $T_x M$,

$$SO(M) := \{u \in L(M) : \langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \delta_{ij},\ (u(e_1, ..., e_n)) \text{ positiv orientiert}\}, \tag{4.14}$$

ist eine Untermannigfaltigkeit von M gegeben. Eine $SO(n)$-Wirkung wird durch die Einschränkung von $L(M) \times GL(n, \mathbb{R}) \to L(M)$ auf $SO(M) \times SO(n) \to SO(M)$ bereitgestellt. Damit heißt $(SO(M), \pi_{SO(M)}, M, SO(n))$ das $SO(n)$-Reperbündel.

Beispiel 4.2.4 (Quotientenraum)**.** Sei G eine Lie-Gruppe und $H \subset G$ abgeschlossene Untergruppe. Der Quotientenraum $G\backslash H$ ist definiert als Raum der Nebenklassen, $G\backslash H := \{gH\}$ mit $gH = \{gh : h \in H\}$. Dann ist $(G, \pi, G\backslash H, H)$ ein H-Prinzipalbündel mit Projektion π, $\pi : G \to G\backslash H,\ \pi(g) := gH$, und einer freien Rechtswirkung von H auf G, die durch die Gruppenmultiplikation in G gegeben ist. Insbesondere lässt sich zum Beispiel die Hopf-Faserung als Quotientenraum auffassen, denn sie ist isomorph zu $(SU(2), \pi, SU(2)/U(1))$ [34].

4.3 Zusammenhänge in Prinzipalbündeln

4.3.1 Definition eines Zusammenhanges

Die Notwendigkeit eines Vergleichs zweier infinitesimaler Orbits eines Prinzipalbündels, das heißt die Beantwortung der Frage, welcher Punkt p in der Faser über x dem Punkt p' in der Faser über x' entspricht, führt auf den Begriff des ***Zusammmenhanges***. Dieser lässt sich von unterschiedlichen Standpunkten aus definieren, von denen drei im Folgenden angegeben werden. Dabei sei wieder $\pi : P \to M$ ein Prinzipalbündel mit Gruppe G. Folgende Definitionen sind äquivalent:

Geometrische Definition nach Ehresmann. Ein Zusammenhang ist eine glatte Distribution, die jedem Punkt $p \in P$ den Horizontalraum H_p als Unterraum seines entsprechenden Tangentialraumes $T_p P$ zuordnet. Letzterer lässt sich dann als direkte Summe schreiben,

$$T_p P = H_p \oplus V_p, \tag{4.15}$$

wobei $V_p \equiv \{X \in T_pP : \pi_*(X) = 0\}$ der Vertikalraum ist. Die Horizontalräume an verschiedenen Punkten derselben Faser hängen zusammen gemäß

$$R_{g*}(H_p) = H_{pg}, g \in G. \tag{4.16}$$

Definition als $\mathscr{G}$-wertige 1-Form. Es sei $\mathscr{G}$ die Lie-Algebra von G, $A \in \mathscr{G}$, $\tilde{A}$ das ***Fundamentalfeld*** [1] mit $\tilde{A}_p = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} p\, exp(tA)$ und Ad die adjungierte Darstellung von G wie in (3.38). Ein Zusammenhang ω ist eine $\mathscr{G}$-wertige 1-Form auf P, $\omega \in \Lambda^1(P, \mathscr{G})$, so dass

$$\omega(\tilde{A}_p) = A, \tag{4.17}$$

$$R_g^* \omega = Ad(g^{-1})\omega \tag{4.18}$$

für $X \in T_pP, g \in G, p \in P$.

$\mathscr{C}(P)$, der Raum der Zusammenhänge, bildet einen affinen Unterraum von $\Lambda^1(P, \mathscr{G})$, dessen zugehöriger Vektorraum $\Lambda^1(P, Ad)$ der Raum der ***Ad-tensoriellen*** 1-Formen ist [34]: Für eine allgemeine Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ auf einem Vektorraum V heißt $\lambda \in C^\infty(P, V)$ ***ρ-tensoriell*** genau dann, wenn $\lambda(pg) = \rho(g^{-1})\lambda(p)\ \forall p \in P, g \in G$ ist. $\eta \in \Lambda^k(P, V)$ heißt ρ-tensoriell, wenn

$$R_g^* \eta = \rho(g^{-1})\eta \tag{4.19}$$

und

$$\eta(X_1, ..., X_k) = 0 \text{ für ein } p \in P,\ X_i \in T_pP \text{ vertikal} \tag{4.20}$$

gilt. Es ist $\Lambda^k(P, \rho) := \{\eta \in \Lambda^k(P, V) : \eta \text{ ist } \rho - \text{tensoriell}\}$. Ferner gilt das folgende

Theorem 4.3.1. *Es existiert ein kanonischer Isomorphismus* $\Lambda^k(M, P \times_\rho V) \to \Lambda^k(P, \rho)$.

Hierbei bezeichnet $P \times_\rho V$ das vermittels der Darstellung ρ zu P assoziierte Vektorbündel, siehe dazu ausführlich Abschnitt 4.5. Theorem 4.3.1 wird sich insbesondere bei der Herleitung der Euler-Langrange-Gleichungen aus dem Yang-Mills-Funktional in Kapitel 7 als nützlich erweisen.

Physikalische Definition. Ein Zusammenhang ordnet jeder Wahl der Eichung lokal auf $U \subset M$ (lokale Trivialisierung, $T_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$) eine $\mathscr{G}$-wertige 1-Form ω_U auf U zu. Für eine andere Eichwahl T_V und Übergangsfunktion g_{UV} ist für zwei lokale Zusammenhänge auf U bzw. V, ω_U bzw. ω_V, und $Y_x \in T_xM, x \in U \cap V$, folgende Transformationsvorschrift gegeben:

$$\omega_V(Y_x) = L^{-1}_{g_{UV}(x)*}(g_{UV*}(Y_x)) + \mathfrak{Ad}_{g_{UV}(x)^{-1}}(w_U(Y_x)) \tag{4.21}$$

Für Matrixgruppen lässt sich dies schreiben als

$$\omega_V = g_{UV}^{-1}\, dg_{UV} + g_{UV}^{-1}\omega_U g_{UV}. \tag{4.22}$$

Eine lokale Zusammenhangs-1-Form ω_U wird auch als ***Eichpotential*** bezeichnet.

[1] Analog dem Sachverhalt, dass jedes vollständige Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(P)$ auf einer Mannigfaltigkeit P vermittels $\Phi : \mathbb{R} \times P \to P$ eine $\mathbb{R}$-Wirkung auf P definiert, erzeugt das Fundamentalfeld $\tilde{A} \in \mathfrak{X}(P)$ vermittels $\tilde{\Phi} : \mathscr{G} \to \mathfrak{X}(P)$ eine G-Wirkung auf P [34].

4.3.2 Krümmung eines Zusammenhanges

Definition 4.3.2. *Sei* $\omega \in \Lambda^1(P, \mathscr{G})$ *ein Zusammenhang,* $X \in T_pP, X = X^V + X^H, \pi_*(X^V) = 0$ *und* $\omega(X^H) = 0$. *Dann definiert die äußere kovariante Ableitung*

$$F^\omega \equiv D^\omega \omega \in \Lambda^2(P, \mathscr{G}), D^\omega \omega \equiv (d\omega)^H, \tag{4.23}$$

die ***Krümmung des Zusammenhangs*** ω. *Hierbei ist* $(d\omega)^H(X_1, X_2) = d\omega(X_1^H, X_2^H)$. *Analog der Bezeichnung,* ω *sei das Eichpotential, wird* F^ω ***Feldstärke*** *genannt.*

Gemäß (4.18) ist die Feldstärke eine *Ad*-tensorielle 2-Form auf P. Für diese gelten die Strukturgleichung,

$$F^\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega], \tag{4.24}$$

und die Bianchi-Identität (homogene Feldgleichung),

$$dF^\omega = [F^\omega, \omega]. \tag{4.25}$$

Aus der Struktur-Gleichung folgt sofort für Matrixgruppen

$$F^\omega = d\omega + \omega \dot{\wedge} \omega. \tag{4.26}$$

4.4 Parallelverschiebung und Holonomie

Definition 4.4.1. *Sei* (P, π, M, G) *ein Prinzipalbündel mit* $T_pP = V_p \oplus H_p$, $X_b \in T_bM$, $X_p^l \in T_pP$ *mit* $p \in \pi^{-1}(b)$ *und* $\pi_*(X_p^l) = X_b$. X_p^l *heißt* ***Lift*** *von* X_b *an* p. X_p^l *heißt* **horizontaler Lift**, *wenn* $X_p^l \in H_p$.

Theorem 4.4.2. *Ein horizontaler Lift ist durch die Angabe des gelifteten Vektors an einem Punkt der Faser eindeutig bestimmt- er ist* ***rechtsinvariant****, das heißt* $X_{pg}^l = R_{g*p}(X_p^l)$.

Definition 4.4.3. *Sei* $\gamma : [0,1] \to M$ *eine stückweise glatte Kurve mit* $\gamma(0) = b_0$ *und* $\gamma(1) = b_1$. *Vermittels der sogenannten* ***Parallelverschiebung*** τ_γ *können nun Fasern verschiedener Basispunkte entlang* γ *ineinander überführt werden:*

$$\begin{aligned} \tau_\gamma : \pi^{-1}(b_0) &\to \pi^{-1}(b_1) \\ p_0 &\mapsto p_1, \end{aligned} \tag{4.27}$$

$p_0 \in \gamma^l(0),\ p_1 \in \gamma^l(1)$, *mit*

$$\begin{aligned} \gamma^l : [0,1] &\to P \\ \pi \circ \gamma^l &= \gamma \end{aligned} \tag{4.28}$$

und

$$\pi \circ \gamma^l = \gamma,\ \dot{\gamma}^l(t) \in H_{\gamma^l(t)} \tag{4.29}$$

das heißt, γ^l *ist horizontaler Lift zu* γ.

Mit γ^l ist auch $R_g \circ \gamma^l$ ein horizontaler Lift. Die Parallelverschiebung ist eine Bijektion und genügt $\tau_\gamma \circ R_g = R_g \circ \tau_\gamma$. Sie hängt nicht von der Parametrisierung von γ ab, sondern nur vom Aufpunkt p_0.

Speziell über die Menge der geschlossenen Kurven lässt sich die sogenannte Holonomie erklären:

Definition 4.4.4. *Sei*

$$\Omega(b, B) := \{\gamma : [0,1] \to B \text{ glatt},\ \gamma(0) = \gamma(1) = b\}/_{\sim} \tag{4.30}$$

der Quotientenraum der geschlossenen Kurven am Basispunkt b mit der Äquivalenzrelation

$$\begin{aligned} \beta \sim \gamma \Leftrightarrow \exists \text{ Diffeomorphismus } h : [0,1] \to [0,1], \\ \text{so dass } h(0) = 0,\ h(1) = 1,\ \gamma = \beta \circ h. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Sei nun $[\gamma] \in \Omega(b, B)$ und $\tau_\gamma : \pi^{-1}(b) \to \pi^{-1}(b)$ eine Bijektion, dann ist

$$\begin{aligned} \tau_{[\gamma]}(p) &= p \cdot h([\gamma], p) \\ \text{mit } h([\gamma], \cdot\ ) &: \pi^{-1}(b) \to G, \\ h([\gamma], pg) &= g^{-1} h([\gamma], p) g. \end{aligned} \tag{4.32}$$

*$h([\gamma], p)$ heißt **Holonomie** des Punktes p bzgl. $[\gamma]$.*

Die Holonomie gibt das Lie-Gruppen-Element an, welches die Parallelverschiebung eines Faserpunktes in einen anderen derselben Faser entlang einer geschlossenen Kurve mit Basispunkt b vermittelt. Letztere soll dabei nur über ihre zugehörige Äquivalenzklasse vorgegeben sein.

Definition 4.4.5. *Die Untergruppe*

$$\mathfrak{Hol}(p) := \{h([\gamma], p) : [\gamma] \in \Omega(b, B)\} \subseteq G \tag{4.33}$$

*heißt die **Holonomiegruppe** von (P, ω) in $p \in P$*

Die Holonomiegruppe ist selbst wieder eine Lie-Gruppe. Sie wird deswegen bezüglich des Zusammenhangs ω bezeichnet, weil dieser gerade die kovariante Ableitung angibt. Charakteristischerweise verschwindet diese, bezüglich der zeitlichen Änderung der Kurve γ, $\dot\gamma(t)$, genommen, für die Parallelverschiebung. Falls B zusammenhängend ist, dann sind die Holonomiegruppen in verschiedenen Punkten $b \in B$ zueinander isomorph. Ferner gilt wegen $h([\gamma], pg) = g^{-1} h([\gamma], p) g$, dass $\mathfrak{Hol}(pg) = g^{-1} \mathfrak{Hol}(p) g$, das heißt, Holonomiegruppen verschiedener Punkte derselben Faser sind konjugiert.

Anschaulich kann die Holonomie mit der Krümmung der Basis $B \ni b$ folgendermaßen assoziiert werden: Seien $X, Y \in ST^1_0(B)$ am Punkt b vertauschende Vektorfelder, $[X, Y]_b = 0$, und X^l, Y^l deren horizontale Lifts in $\pi^{-1}(U)$, wobei $U \in B$ eine offene Umgebung von b ist. Es ist dann

$$0 = [X, Y]_b = [\pi_*(X^l), \pi_*(Y^l)]_b = \pi_*([X^l, Y^l]_p).$$

Wegen $[X^l, Y^l]_p \in V_p \subset T_pP$ und $T_pP = H_p \oplus V_p,\ X = X^H + V^{\omega(X)} = X^H + V^\zeta$ mit $\zeta \in \mathscr{G}$, existiert $\zeta \in \mathscr{G}$, so dass $[X^l, Y^l]_p = V_p^\zeta \neq 0$. Weiter ist

$$\begin{aligned}\omega_p(V_p^\zeta) = \zeta &= \omega_p([X^l, Y^l]_p) \\ &= -\Big(d\omega(X^l, Y^l) + [\omega_p(X^l)_p, \omega_p(Y_p^l)]\Big) \\ &= -\Omega_p(X_p^l, Y_p^l).\end{aligned} \tag{4.34}$$

Das aus X, Y aufgespannte Parallelogramm auf der Basis wird demnach unter einem horizontalen Lift „geöffnet", weist dann also eine nicht-triviale infinitesimale Holonomie auf, die durch die Komponenten des Krümmungstensors Ω gegeben ist. Der Begriff der Holonomie ermöglicht folglich eine geometrische Interpretation der Krümmung eines Hauptfaserbündels ähnlich der anschaulichen Verbindung von Krümmungstensor und Paralleltransport auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

4.5 Assoziierte Bündel

4.5.1 Definition

Definition 4.5.1. *Sei (P, π, M, G) ein Prinzipalbündel und wirke G zusätzlich auf einer Mannigfaltigkeit N von links. Gemeinsam mit einer Rechtswirkung R_g auf $P \times N$,*

$$R_g : P \times N \to P \times N, \tag{4.35}$$

$$(p, z) \mapsto (p, z)g := (pg, g^{-1}z), \tag{4.36}$$

ermöglicht dies die Einteilung von $P \times N$ in Äquivalenzklassen $[p, z]$, womit

$$P \times_G N = \{[p, z] : (p, z) \in P \times N\} \tag{4.37}$$

als Quotientenraum aufgefasst werden kann, in dem

$$(p_1, z_2) \sim (p_2, z_2) \Leftrightarrow \exists g \in G : (p_1, z_1)g = (p_2, z_2). \tag{4.38}$$

Ist $T_U = (\pi, T_U^2) : \pi^{-1}(U) \to U \times G, T_U^2 : \pi^{-1}(U) \to G$, eine lokale Trivialisierung von P, so definiert

$$\hat{T}_U : \hat{\pi}^{-1}(U) \to U \times N, \hat{T}_U([p, z]) := (\pi(p), T_U^2(p)z), \tag{4.39}$$

eine lokale Trivialisierung von $P \times_G N$, wobei

$$\hat{\pi} : P \times_G N \to M, \hat{\pi}\left([p, z]\right) := \pi(p), \tag{4.40}$$

eine Projektionsabbildung ist. Im Gegensatz zu den Fasern des Bündels P sind die Fasern des zu P assoziierten Bündels nicht diffeomorph zu G, sondern zu N. Man sagt, durch $(P \times_G N, \hat{\pi}, M)$ ist ***das zu P vermittels G assoziierte Bündel mit Fasertyp N*** *gegeben.*

Eine Faserung, deren Fasern endlichdimensionale Vektorräume sind, heißt ***Vektorbündel*** und ist ein Tripel (E, π, M) mit zwei Mannigfaltigkeiten E, M und einer Projektionssabbildung $\pi : E \to M$. Die lokale Trivialisierung T_U ist hier gegeben durch den Diffeomorphismus

$$T = (T^1, T^2) : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{K},\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}, \tag{4.41}$$

wobei $T^1 = \pi_{\pi^{-1}(U)}$ und $T^2_{E_y} : E_y \to \mathbb{K}^n$ für alle $y \in U$ $\mathbb{K}$-linear ist. Man sagt, durch (E, π, M) ist eine lokal triviale Faserung über M vom Typ $\mathbb{K}$ gegeben.

Es lässt sich nun zu einem Prinzipalbündel (P, π, M, G) ein Vektorbündel $P \times_\rho V$ vermittels einer Darstellung ρ assoziieren, wobei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist,

$$\rho : G \to GL(V), \tag{4.42}$$

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)\ \forall g_1, g_2 \in G, \tag{4.43}$$

und die Linkswirkung durch G auf V durch $gv = \rho(g)v, v \in V$ gegeben sein soll. Auf den Fasern von $P \times_\rho V$ lässt sich eine $\mathbb{K}$-Vektorraumstruktur definieren durch

$$[p, v] + [p, w] = [p, v + w]$$
$$a[p, v] = [p, av]\ a \in \mathbb{K}.$$

Es gilt $\hat{T}^2([p, v]) = \rho(T^2(p))v$, folglich ist $\hat{T}^2_{(P\times_\rho V)_x} : (P \times_\rho V)_x \to V$ linear.

4.5.2 Beispiele

Beispiel 4.5.2 (Tangentialbündel)**.** Sei (TM, π, M) das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit M. Mit dem Reper-Bündel $(L(M), \pi, M)$ und der Darstellung $\rho : GL(\mathbb{R}, n) \to GL(\mathbb{R}^n)$ kann dann $TM \cong L(M) \times_\rho \mathbb{R}^n$ als die zu $L(M)$ assoziierte Faserung mit Fasertyp $\mathbb{R}^n$ aufgefasst werden.

Beispiel 4.5.3 (Spinor-Bündel)**.** Die Definition des Spinor-Bündels erfordert zunächst die Einführung des Begriffs der Spin-Struktur $(P_{Spin}(M), \zeta)$ mit Spin-Gruppe $Spin$, welche sich über die Clifford-Algebra $Cl(V, q)$ definieren lässt [2] Die Möglichkeit der Ausstattung eines Bündels mit einer Spin-Struktur erlaubt die dortige Existenz von Spinoren, ist aber aufgrund eventueller topologischer Einschränkungen nicht auf beliebigen Mannigfaltigkeiten möglich (für eine ausführliche Darstellung auch des folgenden groben Abrisses über Spinorbündel siehe [36]).

Sei E ein orientiertes relles n-dimensionales Riemannsches Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit M und $F_{SO}(E)$ dessen $SO(n)$-Rahmenbündel. Für $n \geq 3$ existiert mit dem Homomorphismus ζ_0 eine universelle Überlagerung, $\zeta_0 : Spin(n) \to SO(n)$ mit $kern\ \zeta_0 = \{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$ [3]. Eine ***Spin-Struktur*** auf E ist ein $Spin(n)$-Bündel $P_{Spin}(M)$ mit der doppelten Überlagerung $\zeta : P_{Spin}(E) \to F_{SO}(E)$ so, dass $\zeta(pg) = \zeta(p)\zeta_0(g)$ für

[2]Sei V Vektorraum über einem kommutativen Feld K und eine quadratische Form q. Die Clifford-Algebra ist definiert als $Cl(V, q) = \mathscr{T}(V)/\mathfrak{T}_q(V)$, wobei $\mathscr{T}(V) = \sum_{r=0}^{\infty} \otimes^r V$. $\mathfrak{T}_q(V)$ ist das von allen Elementen der Form $v \otimes v + q(V)1$ für alle $v \in V$ erzeugte Ideal in $\mathscr{T}$. Es ist durch $Cl^i(V, q) = \{\varphi \in Cl(V, q) : \alpha(\varphi) = (-1)^i \varphi\}$ der Eigenraum von α definiert mit dem Automorphismus $\alpha : Cl(V, q) \to Cl(V, q)$ mit $\alpha(v) = -v$, $\alpha^2 = id$.

[3]Es ist $Cl^x(V, q) = \{\varphi \in Cl(V, q) : \exists \varphi^{-1}$ mit $\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = 1\}$ die multiplikative Gruppe der Einheiten in der Clifford-Algebra. $Cl^x(V, q)$ enthält alle Elemente $v \in V$ mit $q(v) \neq 0$. Weiter ist mit $P(V, q)$ die Untergruppe von $Cl^x(V, q)$ bezeichnet, die von Elementen $v \in V$ mit $q(v) = 0$ erzeugt wird und mit $Pin(V, q)$ die Untergruppe von $Cl^x(V, q)$, die von Elementen $v \in V$ mit $q(v) = \pm 1$ erzeugt wird. Damit ist $Spin(V, q)$ definiert als $Spin(V, q) = Pin(V, q) \cap Cl^0(V, q)$

$p \in P_{Spin}(E)$ und $g \in Spin(n)$. Eine ***Spin-Mannigfaltigkeit*** ist eine orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Spin-Struktur auf ihrem Tangentialbündel.

Mit diesen vorbereitenden Definitionen ist das ***Spinorbündel*** $S(E)$ nun definiert als das assoziierte Bündel

$$S(E) = P_{Spin}(E) \times_{\mu} M. \tag{4.44}$$

Hierbei ist $\mu : Spin(n) \to SO(M)$ die durch Linksmultiplikation mit Elementen aus $Spin(n) \subset Cl^0(\mathbb{R}^n)$ gegebene Darstellung und M das Linksmodul für $Cl^0(\mathbb{R}^n)$.

Ein ***Spinor*** ist definiert als ein Schnitt im Spinorbündel.

4.6 Homogene Bündel

Definition 4.6.1. *Ein **homogener Raum** ist eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer transitiven G-Wirkung.*

Sei M geschlossen und G kompakt. Für $H \subset G$ abgeschlossen, kann der homogene Raum (M, G) als Faktorraum $(G/H, G)$ aufgefasst werden. Im Folgenden sei $H = \{g \in G : gx = x\}$ für ein festes $x \in M$ der Stabilisator von G. Seien ferner mit $\mathscr{G}$ und $\mathscr{H}$ die Lie-Algebren von G bzw. H bezeichnet und sei $\mathscr{M} \subset \mathscr{G}$ so, dass $\mathscr{G} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{H}$. Man kann zeigen, dass H abgeschlossen ist. Weiter gilt folgendes

Theorem 4.6.2. *(G, π, M) ist zusammen mit der H-Rechtsmultiplikation auf G ein H-Prinzipalbündel.*

Definition 4.6.3. *Ein Hauptfaserbündel (P, π, M, K) heißt **homogenes Bündel**, wenn G auf P von links wirkt mit*

$$g(pk) = (gp)k \tag{4.45}$$

$$\pi(gp) = g\pi(p) \tag{4.46}$$

für $p \in P, k \in K, g \in G$. Man sagt genauer, dass (P, π, M, K) ein G-homogenes Bündel ist.

Betrachte nun mit $P_\rho := G \times_\rho K$ das vermittels des Lie-Algebren-Homomorphismus $\rho : H \to G$ assoziierte Bündel vom Fasertyp K. Es ist $[g, k] \in P_\rho$ mit $[gh, \rho(h^-1)k] = [g, k]$. K definiert eine Rechtswirkung auf P_ρ durch $[g, k]k_1 := [g, kk_1], k_1 \in K$. Die Projektion $\pi_\rho : P_\rho \to M$ sei gegeben durch

$$\pi_p([g, h]) = \pi(g) = gx. \tag{4.47}$$

Damit ist (P_ρ, π_ρ, M, K) ein Hauptfaserbündel. Auf dessen Totalraum kann eine G-Linkswirkung definiert werden gemäß

$$g_1[g, h] := [g_1 g, h] \tag{4.48}$$

für $g_1 \in G$. Damit ist (P_ρ, π_ρ, M, K) ein G-homogenes Hauptfaserbündel. Es lässt sich zeigen, dass jedes homogene K-Prinzipalbündel von dieser Form ist ([34]).

Kapitel 5

Strukturen auf Prinzipalbündeln

Die Definition von Strukturen ermöglicht es, Mannigfaltigkeiten mit besonderen geometrischen Eigenschaften auszustatten. Exakter gefasst, ist die Existenz einer geometrischen Struktur der Tatsache äquivalent, dass die Strukturgruppe des Reperbündels $L(M)$ über der betrachteten Mannigfaltigkeit M auf eine charakteristische Untermenge von $GL(n)$ eingeschränkt werden kann. Die auf diese Weise definierten G-Strukturen beschreiben spezielle Geometrien (Riemannsche, komplexe, symplektische, Kontakt-,...) insofern, als dass sie deren lokale Symmetrien angeben und auf diese Weise den „verschwommenen" Begriff der geometrischen Struktur präzisieren.

Strukturen sind immer von Faststrukturen induziert. Die Gegenrichtung muss nicht, kann aber gelten. Dies ist der Fall, wenn die Faststruktur eine sogenannte Integrabilitätsbedingung erfüllt. Man sagt dann, die Faststruktur sei mit der Struktur verträglich.

Das folgende Kapitel mit Material aus [32], [37], [38], [39], [40], [41], [42] gibt einen groben Überblick über verschiedene Arten von Strukturen und deren Eigenschaften, die im weiteren Verlauf nützlich sein werden. Insbesondere Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten nehmen als besondere Klasse von Kähler-Mannigfaltigkeiten eine bedeutende Rolle in Zusammenhang mit Stringkompaktifizierungen ein.

5.1 G-Strukturen

Wie bereits einleitend erwähnt, sind Strukturen auf Mannigfaltigkeiten M Faststrukturen zusammen mit einer bestimmten Integrabilitätsbedingung. Der Begriff der Struktur wird hierbei in dem Sinne verstanden, dass durch die Definition spezieller Tensorfelder die Geometrie der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit entsprechend modifiziert wird. Alternativ lassen sich Strukturen als Einschränkung der Strukturgruppe eines Prinzipalbündels auffassen. Dazu bezeichnen im Folgenden $P := (P, \pi_P, M)$ und $Q := (Q, \pi_Q, N)$ ein G-Hauptfaserbündel über M bzw. ein H-Hauptfaserbündel über N.

Definition 5.1.1. *Ein* ***Hauptfaserbündel-Homomorphismus*** *ist ein Paar $(\hat{F}, \lambda)$, bestehend aus einer glatten Abbildung $\hat{f} : Q \to P$ und einem Lie-Gruppen-Homomorphismus $\lambda : H \to G$, so dass für alle $q \in Q,\ h \in H$ gilt $\hat{F}(qh) = \hat{F}(q)\lambda(h)$. Es existiert daher eine glatte Abbildung $F : N \to M$ mit $F = \pi_P \circ \hat{F} \circ \pi_Q^{-1}$. Falls $N = M$ und $F = id_M$, heißt Q* ***Reduktion von P auf H*** *oder auch* ***reduziertes Unterbündel***

von *P.*

Proposition 5.1.2. *P kann genau dann auf ein H-Unterbündel reduziert werden, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M derart gibt, dass die Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ ausschließlich Werte in H annehmen.*

Die Möglichkeit einer Reduktion der Strukturgruppe von P ist von den topologischen Eigenschaften des zu P assoziierten Bündels E abhängig. Man kann zeigen, dass die Existenz eines reduzierten Unterbündels mit der eines Schnittes in E korrespondiert:

Theorem 5.1.3. *P lässt sich genau dann auf ein H-Unterbündel einschränken, wenn das zu P assoziierte Bündel $E = P \times_G G/H$ die Existenz eines Schnitts $\sigma : E \to M$ zulässt.*

Im Fall des Rahmenbündels $L(M)$ mit Strukturgruppe $GL(n, \mathbb{R})$ wird die Reduktion auf $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ inbesondere als **G-Struktur** bezeichnet. Die nun auf dem zu $L(M)$ assoziierten Vektorbündel E existierenden Schnitte können Tensorfelder definieren, welche E mit entsprechenden (geometrischen) Strukturen versehen. Man sagt dann, die G-Struktur sei durch einen Tensor definiert. Dies versteht sich folgendermaßen: Sei $\mathscr{T}(\mathbb{R}^n) \ni T_0$ die Tensoralgebra über $\mathbb{R}^n$ und $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ die größte abgeschlossene Untergruppe, die T_0 invariant lässt. Laut Beispiel 4.2.2 kann jedes Element $u \in L(M)$ als Bild des Isomorphismus $u : \mathbb{R}^n \to T_{\pi(u)}M$ aufgefasst werden. Hierbei ist $u(e_i) = X_i$, wobei $\{e_1, ..., e_n\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Durch u wird nun ein Tensor-Algebra-Isomorphismus u_* induziert, $u_* : \mathscr{T}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{T}(T_{\pi(u)}M)$. Dann ist $T = u_* T_0$ ein Schnitt im Bündel der Tensor-Algebra $\mathscr{T}(M)$. Falls $T_0 \in T^r_s M$, so ist T ein Schnitt in $T^r_s M$. Da T_0 laut Annahme G-invariant ist, definiert es auch einen Schnitt in dem zu $L(M)$ assoziierten Bündel $L(M)/G$. In diesem Sinne ist P eine durch T_0 definierte G-Struktur.

Die Abschnitte 5.2, 5.3 und 5.4 nähern sich der Definition von Strukturen im Speziellen von dieser „geometrischen“ Perspektive, indem die Strukturen selbst mit den entsprechenden implizierten Tensoren identifiziert werden. In diesem Zusammenhang wird zwischen Faststrukturen und Strukturen unterschieden werden. Letztere erfüllen eine sogenannte Integrabilitätsbedingung. Der Begriff dieser ist im Kontext mit G-Strukturen, definiert als Einschränkung eines Reperbündels, wie folgt zu verstehen:

Definition 5.1.4. *Eine G-Struktur auf M, $G \subset GL(n, \mathbb{R})$, heißt **integrabel**, wenn für jeden Punkt in M lokale Koordinaten $\{(U; x)\}$ so existieren, dass der lokale Schnitt $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ von $L(M)$ auch ein lokaler Schnitt des reduzierten Bündels (P, π, M, G) ist.*

Die Frage, ob eine G-Struktur integrabel ist oder nicht, hängt (wie auch jene, ob eine solche überhaupt existiert) von topologischen Gegebenheiten des betrachteten Hauptfaserbündels ab. Beispielsweise ist jede $GL(n, \mathbb{R})$-Struktur auf M integrabel. Falls M kompakt ist, so existiert nur dann eine integrable $O(n)$-Struktur, wenn M sich durch einen Torus überdecken lässt. Im Allgemeinen gilt Folgendes:

Proposition 5.1.5. *Eine G-Struktur ist genau dann integrabel, wenn ein Atlas* $\{(U_\alpha; x^{(\alpha)})\}$ *existiert, so dass* $\left(\frac{\partial x_i^{(\alpha)}}{\partial x_j^{(\beta)}}\right)_{ij} \in G$ *für alle* $x \in U_\alpha \subset U_\beta$.

Von dem Standpunkt aus, dass G-Strukturen als von Tensoren definiert gedacht werden können, erklärt sich Integrabilität wie folgt:

Proposition 5.1.6. *Sei* P *eine durch einen Tensor* T_0 *definierte G-Struktur.* P *ist genau dann integrabel, wenn ein Atlas* $\{(U_\alpha; x^{(\alpha)})\}_{\alpha\in I}$ *auf* M *existiert, so dass* $T = u_* T_0$ *konstante Komponenten auf jedem* U_α *hat.*

Ist ω der Zusammenhang einer durch einen Tensor T definierten G-Struktur P, so ist T bezüglich ω kovariant konstant, $\nabla^\omega T = 0$. Neben dem Zusammenhang ω mit Krümmung $D\omega = \Omega$ existiert im Speziellen auf dem Rahmenbündel $L(M)$ eine ***kanonische 1-Form*** θ mit $D\theta = \Theta$. Θ wird ***Torsions-2-Form*** genannt. Sie genügt der Strukturgleichung bzw. der Bianchi-Identität

$$d\theta + \omega \wedge \theta = \Theta, \tag{5.1}$$

$$\Omega \wedge \theta = D\Theta. \tag{5.2}$$

θ kann vermittels des Vektorraum-Isomorphismus u aus 4.2.2 definiert werden,

$$\theta(X) = u^{-1}\pi_* X, \tag{5.3}$$

mit $X \in T_u L(M)$. θ lässt sich auf ein Unterbündel von $L(M)$ einschränken und ist dann die kanonische 1-Form dieser G-Struktur. Es gilt

$$R_a^* \theta = a^{-1}\theta \tag{5.4}$$

für $a \in G \subset GL(n, \mathbb{R})$.

Man kann nun zeigen, dass jede integrable G-Struktur einen torsionsfreien Zusammenhang besitzt.

Anhand folgender Beispiele soll verdeutlicht werden, wie verschiedene Einschränkungen der Strukturgruppe des Rahmenbündels $L(M)$ die Existenz typischer Tensorfelder implizieren und auf diese Weise besondere Geometrien auf M definieren:

Beispiel 5.1.7 (Riemannsche Metrik)**.** Betrachte das orthonormale Rahmenbündel mit $G = O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}| A^t A = 1_n\}$. Dieser Einschränkung entspricht ein Schnitt im assoziierten Bündel $E = L(M) \times_{GL(n,\mathbb{R})} GL(n, \mathbb{R})/O(n, \mathbb{R}) = L(M)/O(n, \mathbb{R})$. Dieser ist gerade eine Riemannsche Metrik auf M, denn $g_u(X, Y) = \langle u^{-1}X, u^{-1}Y\rangle$ mit $u \in L(M)$ ist entlang der Fasern von $O(M)$ konstant, $g_{ua}(X, Y) = g_u(X, Y)$, $a \in O(n, \mathbb{R})$. $L(M)/O(n, \mathbb{R})$ kann daher mit dem Unterbündel des Vektorbündels symmetrischer kovarianter 2-Tensoren auf M indentifiziert werden.

Beispiel 5.1.8 (Fastkomplexe Struktur)**.** Eine komplexe Struktur J, vgl. Abschnitt 5.2, kann als glatter Schnitt in $End(TM)$ mit $J^2 = -id$ aufgefasst werden. Mit dem Isomorphismus u und der kanonischen komplexen Struktur J_0 auf $\mathbb{R}^{2n}$ kann ein solcher

Schnitt durch $J_u = uJ_0u^{-1}$ definiert werden. J_0 ist ein Schnitt in $E = L(M)/GL(n, \mathbb{C})$, dessen Existenz jedoch von topologischen Gegebenheiten von M abhängt.

Beispiel 5.1.9 (Fast-Hermitesche Struktur)**.** Für die Einschränkung auf $G = U(n) = GL(n, \mathbb{C}, n) \cap O(2n)$ ist eine fast-Hermitesche Struktur auf M eine fastkomplexe Struktur J zusammen mit einer Riemannschen Metrik g so, dass $g(JX, JY) = g(X, Y)$, vgl. Abschnitt 5.3.

Sei (M, J, g) eine fast-Hermitesche Struktur mit offener Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M. Seien mit $\{X_i, X_{i^*}\}$ und $\{\bar{X_i}, \bar{X_{i^*}}\}$ lokale orthonormale Basen von U_α bzw. U_β gegeben, wobei durch $\{X_i, X_{i^*}\} = \{X_1, ..., X_n, JX_1, ..., JX_n\}$ die sogenannte J-Basis erklärt sei. Bezüglich dieser Basis ist J gegeben als

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Die beiden Koordinatendarstellungen eines Vektors $X \in T_mM$ mit $m \in U_\alpha \cap U_\beta$ transformieren sich nun komponentenweise mithilfe der Übergangsfunktion (vgl. Kapitel 4),

$$(\bar{X}) = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{\in O(2n)} (X),$$

wobei A, B, C, D $n \times n$ Matrizen sind. Eine kurze Rechnung zeigt, dass $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ kommutieren und dass somit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in U(n)$ ist. Für eine gegebene fast-Hermitesche Struktur ist also die Strukturgruppe auf $U(n)$ reduzierbar. Umgekehrt lässt sich für ein gegebenes M mit auf $U(n)$ reduzierter Strukturgruppe ein globales Tensorfeld J so definieren, dass $J^2 = -I$. Eine Reduktion der Strukturgruppe auf $U(n)$ geht also mit der Existenz einer fast-Hermiteschen Struktur einher.

Beispiel 5.1.10 (Fastkontaktstruktur)**.** Sei $\{M, \Phi, \xi, \eta, g\}$ eine Fastkontaktstruktur mit kompatibler Metrik g (siehe dazu Kapitel 6), $\dim M = 2n + 1$ und $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung mit lokaler orthonormaler Basis $\{X_i, X_{i^*}, \xi\}$. Hierbei ist X_i das zu ξ orthogonale Einheitsvektorfeld und $X_{i^*} = \Phi X_i$ Einheitsvektorfeld orthogonal zu X_i und ξ. Durch Wahl eines zu X_i, X_i^* und ξ orthogonalen Einheitsvektorfeldes X_{i+1}^* konstruiert sich dann sukzessive die gesamte sogenannte Φ-Basis. Bezüglich dieser ist Φ gegeben über

$$\begin{pmatrix} 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Analog dem vorherigen Beispiel lässt sich zeigen, dass dann die Strukturgruppe von M auf $U(n) \times 1$ reduzierbar ist. Ist umgekehrt eine Fast-Kontaktstruktur über Reduktion der Strukturgruppe auf $U(n) \times 1$ gegeben, lassen sich Strukturen Φ, ξ, η definieren mit $\Phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ sowie $\eta(\xi) = 1$. Die Reduktion der Strukturgruppe führt also unmittelbar auf die Existenz einer Fastkontaktstruktur.

Die folgenden Abschnitte widmen sich dem (in der Literatur gängigen) „geometrischen“ Zugang zu G-Strukturen, indem diese von vornherein als (Tupel) charakteristische(r) Tensorfelder mit bestimmten Eigenschaften und Relationen untereinander definiert werden. Insbeondere die Riemannsche Metrik g und die komplexe Struktur J ermöglichen die Einführung der sogenannten Fast-/nearly Kähler[1] Struktur, welche symplektische und Hermitesche Struktur in sich vereint.

5.2 (Fast-)Komplexe Strukturen

Definition 5.2.1. *Eine* ***komplexe Mannigfaltigkeit*** *M mit $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ bzw. $\dim_{\mathbb{R}} M = 2m$ ist ein toplogischer Raum mit einer Menge von Tupeln $\{(U_i, \varphi_i)\}$, wobei $\{U_i\}$ offene, M überdeckende Teilmengen sind und $\varphi_i : U_i \to U \subset \mathbb{C}^m$ Homöomorphismen. Kartenwechsel $\Psi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ sind* ***holomorph****, das heißt für die beiden Karten (U_i, φ_i) und $(U_j, \varphi_j), p \in U_i \cap U_j$ und $\varphi_i(p) =: z^\mu = x^\mu + iy^\mu, \varphi_j(p) =: w^\nu = u^\nu + iv^\nu$ sind die* ***Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen***

$$\frac{\partial u^\nu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial v^\nu}{\partial y^\nu}, \ \frac{\partial u^\nu}{\partial y^\nu} = -\frac{\partial v^\nu}{\partial x^\nu} \tag{5.7}$$

für $1 \leq \mu, \nu \leq m$ erfüllt.

Die grundlegenden differentialgeometrischen Objekte der vorherigen Kapitel lassen sich nun komplexifizieren. Betrachte dazu eine 2m-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit M mit Tangentialraum im Punkt $p \in M$, T_pM. Eine Koordinatenbasis von T_pM ist gegeben durch $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^m}; \frac{\partial}{\partial y^1}, ..., \frac{\partial}{\partial y^m}\right)$ mit ihrem Dual $(dx^1, ..., dx^m; dy^1, ..., dx^m)$. Durch komplexe Kombination erhält man die bezüglich dieser rellen Basis komplexifizierten Basen für $T_pM^{\mathbb{C}}$ bzw. $T_pM^{*\mathbb{C}}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^\mu} &:= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right\} \\ \overline{\frac{\partial}{\partial z^\mu}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right\} \end{aligned} \tag{5.8}$$

bzw.

$$\begin{aligned} dz^\mu &:= dx^\mu + idy^\mu \\ d\bar{z}^\mu &:= dx^\mu - idy^\mu. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{C}} = m$ kann immer als differenzierbare Mannigfaltigkeit mit komplexifierter Riemannscher Metrik g aufgefasst werden,

$$g_p(Z, W) = g_p(X, U) - g_p(Y, V) + i[g_p(X, V) + g_p(Y, U)] \tag{5.10}$$

[1] Um Missverständnisse/Verwechslungen aufgrund der Mehrdeutigkeit der Übersetzung zu vermeiden, wird im Folgenden auf die deutsche Bezeichnung von „nearly“ verzichtet, zudem „fast“ als Begriff bereits fest besetzt ist. Eine Übersetzung mit „beinahe“ scheint in der deutschen Literatur nicht üblich.

für $X + iY, W = U + iV \in T_pM^{\mathbb{C}}$. Bezüglich 5.9 sind ihre Komponenten durch

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(p) &= g_p\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = g_{\nu\mu}(p), \\ g_{\mu\bar{\nu}}(p) &= g_p\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) = g_{\bar{\nu}\mu}(p), \\ g_{\bar{\mu}\nu}(p) &= g_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \frac{\partial}{\partial z^\nu}\right) = \overline{g_{\mu\bar{\nu}}}(p), \\ g_{\overline{\mu\nu}}(p) &= g_p\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\nu}\right) = \overline{g_{\nu\mu}}(p) \end{aligned} \tag{5.11}$$

gegeben.

Komplexe Strukturen auf Mannigfaltigkeiten werden immer von einer sogenannten fastkomplexen Struktur induziert, welche die Integrabilitätsbedingung erfüllt (vgl. Abschnitt 5.1):

Definition 5.2.2. *Eine **fastkomplexe Struktur** $J = J^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial z^\nu} \otimes dz^\mu \in ST^1_1(M)$ ist ein Tensorfeld*

$$J_p : T_pM^{\mathbb{C}} \to T_pM^{\mathbb{C}},\ J_p^2 = -id_{T_pM^{\mathbb{C}}}. \tag{5.12}$$

Es ist

$$J_p \frac{\partial}{\partial z^\mu} = i \frac{\partial}{\partial z^\mu},\ J_p \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}, \tag{5.13}$$

und damit

$$J_p = i dz^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial z^\mu} - i d\bar{z}^\mu \otimes \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu}. \tag{5.14}$$

J zerlegt den Tangentialraum $T_pM^{\mathbb{C}}$ in die direkte Summe des bezüglich J positiven und negativen Eigenraums und charakterisiert somit die Menge der Vektoren $Z \in T_pM^{\mathbb{C}}$ als ***(anti-)holomorphe*** Vektoren $Z^+(Z^-)$,

$$\begin{aligned} T_pM^{\mathbb{C}} &= T_pM^+ \oplus T_pM^-, \\ Z &= Z^+ + Z^- \end{aligned} \tag{5.15}$$

mit

$$T_pM^\pm = \left\{ Z = Z^\mu \frac{\partial}{\partial z^\mu} \in T_pM^{\mathbb{C}} : J_pZ = \pm iZ \right\}, \tag{5.16}$$

wobei $\dim_{\mathbb{C}} T_pM^\pm = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{C}} M$. (Umgekehrt ist durch eine Zerlegung von $T_pM^{\mathbb{C}}$ eine fastkomplexe Struktur definiert.) Man schreibt auch $T_pM^\pm \ni Z^\pm := P^\pm Z$ mit der Projektion

$$P^\pm := \frac{1}{2}\Big(I_{2m} \mp iJ_p\Big), \tag{5.17}$$

$$J_pP^\pm Z = \pm iP^\pm Z. \tag{5.18}$$

Durch eine solche Zerlegung lassen sich bereits bekannte Objekte wie Vektorfelder, Formen und äußere Ableitungen im komplexen Fall von neuer Perspektive her definieren: Der Raum der Vektorfelder $ST_0^1(M)^{\mathbb{C}} \ni Z$ kann mithilfe von J zerlegt werden, $ST_0^1(M)^{\mathbb{C}} = ST_0^1(M)^+ \oplus ST_0^1(M)^-$. Im Raum $\Omega_p^{q=r+s}(M)^{\mathbb{C}}$ der ***komplexen q-Formen*** $\omega = \zeta + i\eta, \zeta, \eta \in \Omega^q(M)$ wird durch J eine spezielle Menge von Formen ausgezeichnet, die sogenannten ***(r,s)-Formen***. $\omega_p^{(r+s)}$ ist dabei so definiert, dass es nur dann nicht verschwindet, wenn von den auswertenden q Argumenten die ersten r Stück aus T_pM^+ und die restlichen s Stück aus T_pM^- stammen. In einer Basis (5.9) ist

$$\omega = \frac{1}{r!s!}\omega_{\mu_1 \ldots \mu_r, \nu_1, \ldots, \nu_s} dz^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dz^{\mu_r} \wedge dz^{\nu_1} \wedge dz^{\nu_s}. \tag{5.19}$$

Es ist $\Omega^q(M)^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{q=r+s} \Omega^{r+s}(M)$ mit $\dim_{\mathbb{R}} \Omega_p^q(M)^{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 2m \\ q \end{pmatrix}$.

Die ***äußere Ableitung*** d einer (r,s)-Form ω lässt sich in ***Dolbeault-Operatoren*** ∂, $\bar{\partial}$ zerlegen,

$$d = \partial + \bar{\partial} \tag{5.20}$$

mit

$$\begin{aligned} \partial &: \Omega^{r,s}(M) \to \Omega^{r+1,s}(M), \\ \bar{\partial} &: \Omega^{r,s}(M) \to \Omega^{r,s+1}(M) \end{aligned} \tag{5.21}$$

Eine (r,0)-Form ω heißt ***holomorphe r-Form***, wenn $\bar{\partial}\omega = 0$.

Definition 5.2.3. *Eine Mannigfaltigkeit M mit einer fastkomplexen Struktur J heißt **fastkomplex**, wenn J allein über 5.12 bestimmt ist.*

In diesem Falle ist die Projektion gegeben durch $P^{\pm} := \frac{1}{2}\Big(id_{T_pM} \mp iJ_p\Big)$.

Bemerkung 5.2.4. Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist immer fastkomplex, die Umkehrung ist nicht richtig. Allgemein lassen sich auf fastkomplexen Mannigfaltigkeiten in jeden Punkt p Koordinaten wählen. Für eine komplexe Struktur braucht es jedoch einen holomorphen Atlas, der sich aus den lokalen holomorphen Koordinaten für J zusammensetzt, welche jeweils auf Umgebungen $U \subset M$ mit $p \in U$ definiert sind. Es ist aber nicht grundsätzlich so, dass die jeweils punktweise gewählten Koordinaten auch welche für ganze Umgebungen von p sind.

Definition 5.2.5. *Der **Nijenhuis-Tensor** N ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} N &: ST_0^1(M) \times ST_0^1(M) \to ST_0^1(M), \\ &N(X,Y) := [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY]. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Theorem 5.2.6. *Eine fastkomplexe Mannigfaltigkeit (M,J) ist genau dann komplex, wenn J der sogenannten **Integrabilitätsbedingung** genügt, das heißt wenn $N(X,Y) = 0$ für $X, Y \in ST_0^1(M)$. J heißt dann **integrabel**.*

Eine (fast)komplexe Struktur (M, J) zusammen mit einer auf M definierten Riemannschen Metrik g erlaubt eine Verallgemeinerung des Begriffs der Riemannschen Mannigfaltigkeit auf den komplexen Fall:

5.3 (Fast-)Hermitesche Strukturen

Definition 5.3.1. *Sei M eine Mannigfaltigkeit M mit (fast)komplexer Struktur J und Riemannscher Metrik g. (M, g) heißt* ***(fast-)Hermitesch****, wenn J g invariant lässt, also $g_p(J_pX, J_pY) = g_p(X, Y)\ \forall X, Y \in T_p(M),\ p \in M$, das heißt, wenn J_p in jedem Punkt $p \in M$ eine Isometrie von $T_p(M)$ definiert. g heißt dann* ***Hermitesche Metrik****.*

Wegen 5.11 ist

$$g_{\mu\nu} = 0 = g_{\overline{\mu\nu}} \tag{5.23}$$

bezüglich einer Basis 5.9. Damit schreibt sich

$$g = g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \otimes d\bar{z}^\nu + g_{\bar{\mu}\nu} d\bar{z}^\mu \otimes dz^\nu. \tag{5.24}$$

Bezüglich einer Hermiteschen Metrik g sind Vektoren $X \in T_pM$ orthogonal zu J_pX, $g_p(J_pX, X) = 0$, salopp gesprochen wird also X durch Multiplikation mit $\pm i$ um 90 Grad gedreht. Hermitesche Mannigfaltigkeiten bilden das komplexe Pendant zu Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Analog der (fast)komplexen Struktur spricht man vom 3-Tupel (M, J, g) als ***(fast-)Hermitesche Struktur***.

Die Einführung einer zusätzlichen symplektischen Struktur auf (fast-)Hermiteschen Mannigfaltigkeiten führt auf den Begriff der

5.4 (Fast-, Nearly) Kähler-Strukturen

Durch die sogenannte fundamentale 2-Form $\Omega \in ST_2^0(M)$ (auch kosymplektische Struktur genannt) können hermitesche Mannigfaltigkeiten mit einer zusätzlichen Struktur ausgestattet werden:

Definition 5.4.1. *Die* ***fundamentale 2-Form (kosymplektische Struktur)*** *Ω ist gegeben durch*

$$\Omega_p(X, Y) = g_p(J_pX, Y, \tag{5.25}$$

$$\Omega(X, Y) = -\Omega(Y, X), \tag{5.26}$$

$$\Omega(JX, JY) = \Omega(X, Y) \tag{5.27}$$

für $X, Y \in T_pM$.

In einer Basis (5.9) ist

$$\Omega = i g_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu \text{ oder auch } \Omega = -J_{\mu\bar{\nu}} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu \tag{5.28}$$

mit $J_{\mu\bar{\nu}} = -i g_{\mu\bar{\nu}}$.

Definition 5.4.2. *Eine fast-Hermitesche Mannigfaltigkeit* (M, g) *heißt*

- ***fast-Kähler***, *falls* $d\Omega = 0$. Ω *wird dann* ***Kähler-Form*** *und* g ***fast-Kähler-Metrik*** *genannt.*
- ***nearly Kähler***, *falls* $(\nabla_X J)X = 0$ *für Vektorfelder* X *auf* M.
- ***Kähler*** *genau dann, wenn* J *integrabel ist,* $\nabla J = 0$.

Bemerkung 5.4.3. Aufgrund der Geschlossenheit der Kähler-Form und der Tatsache, dass diese nicht ausgeartet ist, handelt es sich bei Ω um eine symplektische Form. (Fast-) Kähler Mannigfaltigkeiten sind also immer auch symplektische Mannigfaltigkeiten. Jede Kähler-Mannigfaltigkeit ist auch nearly Kähler. Für Beispiele von Kähler-Mannigfaltigkeiten siehe [37] und dortige Verweise.

Die Tatsache, dass die komplexe Struktur auf Kähler-Mannigfaltigkeiten parallel bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhanges ist, erlaubt eine äquivalente Definition von Kähler-Mannigfaltigkeiten über eine Einschränkung der Holonomiegruppe:

Theorem 5.4.4. *Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit* M *der Dimension* $2n$ *ist genau dann Kähler, wenn* $\mathfrak{Hol}(M) \subset U(n)$.

Ist M zusätzlich Ricci-flach, dann gilt das folgende

Theorem 5.4.5. *Eine zusammenhängende Ricci-flache Riemannsche Mannigfaltigkeit* M *der Dimension* $2n$ *ist genau dann Kähler, wenn* $\mathfrak{Hol}(M) \subset SU(n)$.

M heißt dann **Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit**. Für den Fall, dass $\dim_{\mathbb{R}}(M) = 4k$, ist $\mathfrak{Hol}(M) \subset Sp(2k) \subset SU(n)$ und M heißt **Hyperkähler**.

Kapitel 6

Von (Fast-)Kontaktstrukturen zu Sasaki-Mannigfaltigkeiten

Sei M eine $(2n+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Kontaktstrukturen sind als spezielle 1-Formen auf M definiert und implizieren eine Reihe von weiteren Objekten und Strukturen. Es bezeichne $\mathfrak{D}$ das durch den Kern der lokalen Kontaktform erzeugte Unterbündel von TM und $C(M)$ den Kegel über M, wobei $\dim \mathfrak{D} = 2n$ und $\dim C(M) = 2n+2$. M kann nun in folgendem Kontext als auf natürliche Weise zwischen $\mathfrak{D}$ und $C(M)$ angesiedelt gedacht werden: Eine Kontaktform η auf M bedingt die Existenz einer symplektischen Struktur auf sowohl $\mathfrak{D}$ als auch dem Kegel. Unter bestimmten Voraussetzungen ist η kompatibel mit einer Fastkontaktform, welche ihrerseits die Existenz einer fastkomplexen Struktur auf $\mathfrak{D}$ und $C(M)$ induziert. Auf diese Weise stellen die Kontakt- und Fastkontaktform das Analogon zu symplektischer bzw. fastkomplexer Struktur in ungerade Dimensionen dar. In einer Sasaki-Struktur werden diese beiden Strukturen miteinander kombiniert und M heißt dann Sasaki-Mannigfaltigkeit. Sasaki-Mannigfaltigkeiten stellen in gewisser Weise das Analogon zu Kähler-Mannigfaltigkeiten in ungeraden Dimensionen dar.

Sasaki(-Einstein)-Mannigfaltigkeiten nehmen im Rahmen der Stringtheorie einen wichtigen Platz ein, insbesondere in Bezug auf eine Überprüfung der AdS/CFT Korrespondenz. 3-Sasaki-Mannigfaltigkeiten stellen eine 2-Sphäre hypkerkomplexer Strukturen bereit und bilden somit einen quaternionischen Spezialfall von Sasaki-Mannigfaltigkeiten. Insbesondere bei der Klassifikation von Mannigfaltigkeiten mit Killing-Spinoren kommt (3-)Sasaki-Mannigfaltigkeiten eine bedeutende Rolle zu: So lässt sich zeigen, dass der Fall eines existierenden Spinors eine Sasaki-Einstein-Struktur der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit impliziert, während die Existenz dreier solcher Spinoren in Korrelation mit einer 3-Sasaki-Struktur steht. Die durch reele Killing-Spinoren auf einfach zusammenhängenden Spin-Mannigfaltigkeiten M induzierte Existenz eines parallelen Killing-Spinors auf dem Kegel $(C(M), \bar{g})$ geht unmittelbar mit dessen Hyperkähler-Struktur einher, woraus die 3-Sasaki-Eigenschaft von M folgt. Auf diese Weise lassen sich Mannigfaltigkeiten mit Killing-Spinoren erfolgreich klassifizieren, siehe auch Abschnitt 8.8.

Das in diesem Kapitel zusamengetragene Material stammt aus [18], [41], [43], [44], [45], [46].

6.1 Kontaktstrukturen

Definition 6.1.1. *Sei M eine $(2n+1)$ dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine **Kontaktstruktur** auf M ist eine Äquivalenzklasse von 1-Formen η,*

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0, \tag{6.1}$$

derart, dass

$$[\eta] := \left\{ \eta \in \Omega^1(M) | \ \eta' \sim \eta :\Leftrightarrow \eta' = f\eta \right\} \tag{6.2}$$

*mit einer nirgends verschwindenden Funktion f auf M[1]. 1-Formen η, die (6.1) genügen, heißen **Kontaktformen**. Ein Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ mit $U, V \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ heißt **Kontakttransformation**, wenn*

$$\Phi^* \eta = f\eta. \tag{6.3}$$

Nach Darboux [47] lässt sich jede Kontaktform α auf $\mathbb{R}^{2n+1} \supset U$ in Koordinaten $(x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_n; z)$ schreiben als $\alpha = dz - \sum_i y_i dx_i$. Über den Pullback mit einer Kontakttransformation ist α lokal durch $\alpha_i = \Phi_i^* \alpha$ gegeben; $\mathfrak{D}_i := ker\ \alpha_i$ sind dann (lokale) Fasern eines $2n$-dimensionalen Unterbündels $\mathfrak{D}$ des Tangentialbündels TM. $\mathfrak{D}$ wird auch ***Kontaktdistribution*** genannt. Es definiert seinerseits eine Kontaktstruktur genau dann, wenn $\alpha_i \wedge (d\alpha_i)^n \neq 0$, wenn also (6.1) auch lokal gilt.

Definition 6.1.2. *Ist $\mathfrak{D}$ orientiert, dann heißt M **ko-orientiert**.*

Im Fall einer ko-orientieren Kontaktmannigfaltigkeit (M, η) definiert $(\mathfrak{D}, d\eta)$ ein symplektisches Unterbündel von TM.

Zu jeder strengen Kontaktstruktur lässt sich ein kanonisches Vektorfeld assoziieren, das zu einer charakteristischen Zerlegung von TM führt:

Definition 6.1.3. *Sei (M, η) eine strenge Kontaktmannigfaltigkeit. Dann ist durch η ein Vektorfeld ξ eindeutig festgelegt mit*

$$\eta(\xi) = 1, \ d\eta(\xi, \cdot) = 0. \tag{6.4}$$

η heißt ***Reeb-Vektorfeld*** und wird auch ***charakteristisches Vektorfeld*** genannt. Es definiert eine eindimensionale charakteristische Foliation $\mathscr{F}_\xi$ auf (M, η). TM lässt sich damit zerlegen gemäß

$$TM = \mathfrak{D} \oplus L_\xi, \tag{6.5}$$

wobei L_ξ das triviale Linienbündel bestehend aus Vektoren senkrecht zu den Blättern von $\mathscr{F}_\xi$ bezeichnet.

[1] Im Folgenden sei, wenn nicht explizit anders vermerkt, stets $f = 1$. Die Kontaktstruktur heißt dann ***strenge Kontaktstruktur***.

6.2 Fastkontaktstrukturen

Durch jede Kontaktstruktur ist ein charakteristisches Vektorfeld eindeutig bestimmt. Die zusätzliche Einführung eines speziellen Endomorphismus auf TM ermöglicht die Ausstattung von M mit einer Fastkontaktstruktur:

Definition 6.2.1. *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine* ***Fastkontaktstruktur*** *ist ein Tripel (ξ, η, Φ) bestehend aus einem Tensorfeld $\Phi \in ST_1^1(M)$, einem Vektorfeld ξ und einer 1-Form η so, dass*

$$\eta(\xi) = 1, \;\; \Phi \circ \Phi = -\mathbb{1} + \xi \otimes \eta. \tag{6.6}$$

M heißt dann ***Fastkontaktmannigfaltigkeit****.*

Korollar 6.2.1.1. *Eine Fastkontaktmannigfaltigkeit ist immer von ungerader Dimension und es gilt $\Phi \circ \xi = 0$ und $\eta \circ \Phi = 0$.*

Wie auch im Fall von Kontaktstrukturen, erzeugt das charakteristische Vektorfeld ξ ein eindimensionales Unterbündel L_ξ von TM, zu dem sich eine eindimensionale charakteristische Foliation $\mathscr{F}_\xi$ assoziieren lässt. Auf dem Unterbündel $\mathfrak{D} = ker\ \eta$ existiert eine fastkomplexe Struktur $J = \Phi|_{\mathfrak{D}}$. Das Tangentialbündel lässt sich folglich zerlegen gemäß $TM \simeq \mathfrak{D} \oplus L_\xi$.

Bemerkung 6.2.2. Der Großteil der gängigen Literatur definiert Fastkontaktstrukturen wie in (5.1.10) als Einschränkung der Strukturgruppe des Reperbündels auf $G = U(n) \times 1$. Streng genommen ist dies so nicht korrekt [2] und gilt nur unter bestimmten einschränkenden Voraussetzungen (vgl. [40]): Eine $(2n + 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit hat genau dann eine Fastkontaktstruktur, wenn ihre Strukturgruppe auf $G = U(n) \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ reduziert werden kann. Ist M zusätzlich orientierbar, so ist $G = U(n) \times \mathbb{Z}_2$. Die Strukturgruppe kann weiter genau dann auf $G = U(n) \times 1$ eingeschränkt werden, wenn $\mathfrak{D}$ orientierbar ist. Ist M eine Kontaktmannigfaltigkeit, dann gilt $G = U(n) \times \mathbb{Z}_2$ und die Möglichkeit der weiteren Einschränkung der Strukturgruppe hängt neben der Orientierbarkeit von M auch von deren Dimension ab. Im Allgemeinen ist eine Fastkontaktstruktur korrekt als Einschränkung auf

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \text{mit } A \in CSp(m, \mathbb{R}), \; b \in GL(1, \mathbb{R}), \; c \in M^{1,2n} \right\} \tag{6.7}$$

definiert. Auf diese Weise wird $\mathfrak{D}$ als Unterbündel von TM mit konformer symplektischer Struktur ausgezeichnet.

6.3 (Fast-)Kontaktstrukturen mit kompatibler Metrik

Definition 6.3.1. *Sei M eine (strenge) Fastkontaktmannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Metrik g ist* ***mit der Fastkontaktstruktur kompatibel****, wenn*

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{6.8}$$

[2] Dies stellt allerdings nur dann ein Problem dar, wenn das durch die Kontaktstruktur induzierte Kontakt-Linienbündel nichttrivial ist- ein Fall, der in der Regel im Vorfeld ausgeschlossen wird.

*für Vektorfelder X, Y auf M. M heißt dann **Fastkontaktmannigfaltigkeit mit kompatibler Metrik**.*

Betrachte nun eine Kontaktmannigfaltigkeit (M, η). Das Bündel $(\mathfrak{D}, d\eta)$ ist dann ein symplektisches Unterbündel von TM. Man kann eine fastkomplexe Struktur J auf $\mathfrak{D}$ so definieren, dass sie mit der symplektischen Form $d\eta$ verträglich ist, das heißt so, dass $d\eta(JX, JY) = d\eta(X, Y)$ für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $d\eta(JX, X) \geq 0$ für alle $X \neq 0$. Durch die Forderung $\Phi\xi = 0$ lässt sich J dann zu einem Endomorphismus auf ganz TM erweitern, was auf

$$d\eta(\Phi X, \Phi Y) = d\eta(X, Y), \;\; X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad d\eta(\Phi X, X) \geq 0 \; \forall X \neq 0 \tag{6.9}$$

führt. (ξ, η, Φ) definiert dann eine Fastkontaktstruktur auf M.

Definition 6.3.2. *Sei (M, η) eine Kontaktmannigfaltigkeit und (ξ, η', Φ) eine Fastkontaktstruktur. (ξ, η', Φ) heißt **mit der Kontaktstruktur verträglich**, wenn $\eta' = \eta$ gilt, ξ das Reeb-Vektorfeld ist und Φ (6.9) genügt. Eine (strenge) Kontaktmannigfaltigkeit zusammen mit einer metrikkompatiblen (strengen) Fastkontaktstruktur (ξ, η, Φ, g) so, dass $g(X, \Phi Y) = d\eta(X, Y)$, heißt **Kontaktstruktur mit kompatibler Metrik**. M wird dann **Kontaktmannigfaltigkeit mit kompatibler Metrik** genannt. Ist zusätzlich $\mathscr{L}_\xi g = 0$, dann heißt (ξ, η, Φ, g) **K-Kontaktstruktur**.*

Jede kompatible Fastkontaktstruktur ist eindeutig durch Φ bestimmt, das, wie oben erläutert, seinerseits über die fastkomplexe Struktur J auf $\mathfrak{D}$ bestimmt ist. Es lässt sich damit zeigen, dass im Fall einer strengen Kontaktmannigfaltigkeit (M, η) eine 1:1-Korrespondenz zwischen kompatiblen fastkomplexen Strukturen J auf dem symplektischen Unterbündel $(\mathfrak{D}, d\eta)$ und kompatiblen Fastkontaktstrukturen (ξ, η, Φ) existiert.

6.4 Sasaki- und 3-Sasaki-Strukturen

6.4.1 Sasaki-Strukturen

Sei im Folgenden $C(M) := M \times \mathbb{R}^+$ der Kegel über einer Fastkontaktmannigfaltigkeit M und $t \in \mathbb{R}^+$. Auf diesem lässt sich eine komplexe Struktur folgendermaßen definieren: Sei $(X, f\frac{d}{dt})$ ein Vektorfeld auf $C(M)$, wobei X tangentialer Vektor an M und $f \in C^\infty(C(M))$ ist. Eine komplexe Struktur J ist dann gegeben durch

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\Phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right), \;\; J^2 = -1. \tag{6.10}$$

Bemerkung 6.4.1. Es existiert eine 1:1-Korrespondenz zwischen (ξ, η, Φ) auf M und induzierter fastkomplexer Struktur auf $C(M)$. Hat M ferner eine mit der Fastkontaktstruktur verträgliche Riemannsche Metrik g, dann wird eine 1:1-Korrespondenz zwischen metrikverträglicher Fastkontaktstruktur auf M und fast-Hermitescher Struktur auf $C(M)$ induziert.

Definition 6.4.2. *Eine Fastkontaktstruktur (ξ, η, Φ) heißt **normal**, wenn ihre korrespondierende fastkomplexe Struktur J auf $C(M)$ integrabel ist. Eine normale metrikverträgliche Kontaktstruktur (ξ, η, Φ, g) auf M heißt **Sasaki-Struktur**. M wird dann **Sasaki-Mannigfaltigkeit** genannt.*

Die Integrabilität von J bedeutet das Verschwinden des Nijenhuis-Tensors (5.22); für allgemeine (1,1)-Tensorfelder Φ lässt sich dieser definieren als

$$N_\Phi(X,Y) = [\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X,Y] - \Phi[X,\Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y]. \tag{6.11}$$

Damit kann die Integrabilitätsbedingung für eine fastkomplexe Struktur und damit die Normalitätsbedingung für eine Fastkontaktstruktur folgendermaßen formuliert werden:

Definition 6.4.3. *Eine Fastkontaktstruktur* (ξ,η,Φ) *auf* M *ist genau dann normal, wenn* $[\Phi,\Phi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi = 0$.

Es lässt sich zeigen, dass eine 1-Form η auf M genau dann eine strenge Kontakstruktur definiert, wenn die durch sie induzierte 2-Form $d(t^2\eta)$ eine symplektische Struktur auf $C(M)$ ist. Ferner existiert eine 1:1-Korrespondenz zwischen (ξ,η,Φ,g) auf M und der fast-Kähler Struktur $(\bar{g}, d(t^2\eta), I)$ auf $C(M)$. Alternativ zur Normalitätsbedingung für metrikverträgliche Fastkontaktstrukturen lassen sich Sasaki-Strukturen auf M deshalb auch über den Kegel erklären:

Definition 6.4.4. *Eine metrikkombatible Fastkontaktmannigfaltigkeit* (M,ξ,η,Φ,g) *mit dim* $M = 2n+1$ *heißt Sasaki-Mannigfaltigkeit, falls der Kegel* $C(M)$ *Kähler ist, das heißt, wenn* $\mathfrak{Hol}(\bar{g}) \subset U(n+1)$.

Folgende Aussagen sind dieser Definition äquivalent:

(1) Es existiert ein Killing-Vektorfeld ξ mit Länge 1 auf M so, dass $\Phi \in ST^1_1(M)$, $\Phi(X) = \nabla_X\xi$, die Bedingung

$$(\nabla_X\Phi)(Y) = g(\xi,Y)X - g(X,Y)\xi \;\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{6.12}$$

erfüllt.

(2) Es existiert ein Killing-Vektorfeld ξ mit Länge 1 auf M so, dass

$$R(X,\xi)Y = g(\xi,Y)X - g(X,Y)\xi \;\forall X,Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{6.13}$$

Als Beispiele für Sasaki-Mannigfaltigkeiten sind insbesondere zu nennen

- Sphären S^{2n+1} mit Kegel $C(M) = \mathbb{C}^{2m+2}/\{0\}$
- $(\mathbb{R}^{2m+1}, g, \eta^\sharp)$ mit $\eta = \frac{1}{2}dz - \frac{1}{2}\sum y_i dx_i$ und Riemannscher Metrik $g = \eta\otimes\eta + \frac{1}{4}\sum(dx_i^2 + dy_i^2)$
- $U(1)$-Prinzipalbündel über Kähler Mannigfaltigkeiten

Ein Spezialfall von Sasaki Mannigfaltigkeiten sind ***Sasaki-Einstein-Mannigfaltigkeiten***: Auf diesen ist zusätzlich $Ric_g = cg$ für eine Konstante c erfüllt und es ist $c = 2n$. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Kegelmetrik $\bar{g}$ Ricci-flach, das heißt, wenn der Kegel Calabi-Yau ist. Es ist $\mathfrak{Hol}(\bar{g}) \subset SU(n+1)$. Weiter lässt sich zeigen, dass jede einfach zusammenhängende Sasaki-Einstein-Mannigfaltigkeit eine Spin-Struktur trägt.

Bemerkung 6.4.5. Auf $(2n+1)$-dimensionalen Sasaki-Einstein-Mannigfaltigkeiten existieren in einer lokalen Orthonormalbasis $\{e^1, e^a\}$, $a = 2, .., 2n+1$, eine 1-, 2-, 3- und 4-Form derart, dass [20]

$$\eta = e^1,\ \omega = e^{23} + e^{45} + ... + e^{2n2n+1},\ P = \eta \wedge \omega,\ Q = \frac{1}{2}\omega \wedge \omega \tag{6.14}$$

mit $d\eta = 2\omega$ und $dP = 4Q$. Ferner ist $d * \omega = 2n * \eta$ sowie $d * Q = (2n-2) * P$. Q ist die mit der G-Struktur assoziierte Casimir 4-Form, siehe dazu auch [20]. Wie in Kapitel 8.8 erläutert werden wird, lassen sich η, ω, P, Q auf Mannigfaltigkeiten mit reellen Killing-Spinoren auch über Killing-Spinoren konstruieren. Man erhält so eine kanonische 3-Form P' sowie kanonische 4-Form Q', die abhängig von der M zugrundeliegenden Struktur mit P bzw. Q übereinstimmen oder nicht. So gilt beispielsweise $Q = Q', P = P'$ auf Sasaki-Einstein-Mannigfaltigkeiten, nicht jedoch im Fall von 3-Sasaki-Mannigfaltigkeiten.

Der Begriff der Sasaki-Struktur lässt sich auf verschiedenen Wegen aus dem der metrikkombatiblen Fastkontaktstruktur gewinnen. Dies ist vergleichbar mit dem Fall einer fast-Hermiteschen Struktur und der Frage, wann diese Kähler wird: Entweder kann dies durch Erfüllen der Bedingungen $[J, J] = 0$ und $d\Omega = 0$ erreicht werden oder aber direkt durch die Forderung, J möge bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhanges parallel sein, $\nabla J = 0$ (vgl. Kapitel 5.4).

Definition 6.4.6. *Eine Fastkontaktmannigfaltigkeit heißt* ***Trans-Sasaki****, wenn Funktionen $\alpha, \beta \in C^\infty$ so existieren, dass*

$$\begin{aligned}(\nabla_X \Phi)Y =& \alpha(g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) && (6.15)\\ &+ \beta(g(\Phi X, Y)\xi - \eta(Y)\Phi X)\ \forall X, Y \in ST^1_0(M). && (6.16)\end{aligned}$$

Für $(\alpha, \beta) = (\alpha, 0)$ mit $\alpha \neq 1 (\alpha = 1)$ heißt M ***α-Sasaki(Sasaki)****. Für $(\alpha, \beta) = (0, \beta)$ mit $\beta \neq 1 (\beta = 1)$ heißt M* ***β-Kenmotsu(Kenmotsu)****. Falls $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, nennt man M* ***kosymplektisch****.*

Definition 6.4.7. *Sei (M, ξ, η, Φ, g) eine metrikkompatible Fastkontaktmannigfaltigkeit. Sie heißt*

- *Sasaki, falls $N = 0$ und $d\eta = \Phi$.*
- *α- Sasaki, falls $N = 0$ und $d\eta = \alpha\Phi$.*
- *kosymplektisch, falls $N = 0$ und $d\Phi = 0$, $d\eta = 0$.*

6.4.2 3-Sasaki-Strukturen

3-Sasaki-Strukturen auf einer Mannigfaltigkeit M stellen insofern eine „Erweiterung" von Sasaki-Strukturen dar, als dass statt einer nun drei normale metrikkombatible Kontaktstrukturen definiert sind.

Definition 6.4.8. *Eine* ***Fastkontakt-3-Struktur*** *auf M, $dimM = 2n+1$, besteht aus 3 Tupeln (ξ_i, η_i, Φ_i), $i = 1, 2, 3$, mit*

$$\begin{gathered}\Phi_k = \Phi_i \circ \Phi_j - \eta_j \otimes \xi_i = -\Phi_j \Phi_i + \eta_i \otimes \xi_j\\ \xi_k = \Phi_i \xi_j = -\Phi_j \xi_i,\ \eta_k = \eta_i \circ \Phi_j = -\eta_j \circ \Phi_i\end{gathered} \tag{6.17}$$

Jede der Fastkontaktstrukturen induziert nun jeweils eine fastkomplexe Struktur J_i auf dem Kegel $C(M)$ mit $J_k = J_i J_j = -J_j J_i$. Folglich weist der Kegel eine fastquaternionische Struktur auf und es gilt dim $C(M) = 4n$. Folglich ist dim $M = 4n+3$. Man kann zeigen, dass sich zu Fastkontakt-3-Strukturen immer eine kompatible Riemannsche Metrik finden lässt und damit (ξ_i, η_i, Φ_i) zu einer ***metrikkompatiblen Fastkontakt-3-Struktur*** $(\xi_i, \eta_i, \Phi_i, g)$ wird. Eine normale Kontakt-3-Struktur auf M heißt ***3-Sasaki-Struktur*** und M ***3-Sasaki-Mannigfaltigkeit***.

Bemerkung 6.4.9. Auf $(4n+3)$-dimensionalen 3-Sasaki-Mannigfaltigkeiten existieren in einer lokalen Orthonormalbasis $\{e^A\}$ mit $\{A\} = \{\alpha, a\}$ 3 1-Formen η^α, 3 2-Formen ω^α, eine 3-Form P und 4-Form Q, $\alpha = 1,2,3$, derart, dass [20]

$$\begin{aligned}
&\eta^1 = e^1,\ \omega^1 = e^{45} + e^{67} + ...e^{4n4n+1} + e^{4n+24n+3},\\
&\eta^2 = e^2,\ \omega^2 = e^{46} - e^{57} + ...e^{4n4n+2} + e^{4n+14n+3},\\
&\eta^3 = e^3,\ \omega^3 = e^{47} + e^{56} + ...e^{4n4n+3} + e^{4n+14n+3},\\
&P = \frac{1}{3}\eta^{123} + \frac{1}{3}\eta^\alpha \wedge \eta^\alpha,\ Q = \frac{1}{6}\omega^\alpha \wedge \omega^\alpha.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

mit $d\eta^\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\eta^\beta \wedge \eta^\gamma + 2\omega^\alpha$ und $d\omega^\alpha = 2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\eta^\beta \wedge \omega^\gamma$.

Wie auch im Fall von Sasaki-Strukturen lassen sich 3-Sasaki-Mannigfaltigkeiten über ihren Kegel definieren:

Definition 6.4.10. *Sei (M^m, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. (M^m, g) heißt **3-Sasaki-Mannigfaltigkeit** mit $\dim_{\mathbb{R}} M = m$ genau dann, wenn für die Kegelmetrik $\bar{g}$ gilt $\mathfrak{Hol}(\bar{g}) \subset Sp(\frac{m+1}{4})$ mit $m = 4n+3$, $n \geq 1$. Der Kegel $(C(M), \bar{g}) = (\mathbb{R}_+ \times M, dt^2 + t^2 g)$ ist damit Hyperkähler.*

Da jede Hyperkähler-Mannigfaltigkeit Ricci-flach ist, folgt, dass jede 3-Sasaki-Mannigfaltigkeit Einstein ist mit $\lambda = 2(2n+1)$. Man kann zeigen, dass die Strukturgruppe einer 3-Sasaki-Mannigfaltigkeit sich auf $Sp(n) \times I_3$ reduzieren lässt, wobei I_3 die 3×3-Einheitsmatrix bezeichnet, und weiter, dass jede 3-Sasaki-Mannigfaltigkeit eine Spin-Mannigfaltigkeit ist.

Beispiele für 3-Sasaki (homogene) Mannigfaltigkeiten sind

- $\frac{Sp(n+1}{Sp(n)} \cong S^{4n+3}$, $\frac{Sp(n+1}{Sp(n)\times\mathbb{Z}_2} \cong \mathbb{R}P^{4n+3}$
- $\frac{SU(m)}{S(U(m-2)\times U(1))}$, $\frac{SO(k)}{SO(k-4)\times Sp(1)}$
- $\frac{G_2}{Sp(1)}$, $\frac{F_4}{Sp(3)}$, $\frac{E_6}{SU(6)}$, $\frac{E_7}{Spin(12)}$, $\frac{E_8}{E_7}$

Kapitel 7

Yang-Mills-Theorie

Betrachte das G-Hauptfaserbündel (P, π, M) über dem Minkowskiraum (M, g) mit nichtabelscher Strukturgruppe G. Sei ω eine Zusammenhangs-1-Form auf P und $\sigma_U \subset M \to P$ ein lokaler Schnitt. Dann ist der auf die Basis zurückgezogene Zusammenhang, das Vektorpotential, gegeben durch $\omega_U = \sigma_U^* \omega = -iqA_U$ mit Kopplungskonstante q. Damit ist die Feldstärke $F_U = -dA_U$. Für $\sigma_V : V \subset M \to P$ gilt aber (vgl. Abschnitt 4.3) $F_U \neq F_V$, da F lokal von der Wahl der Eichung abhängt und im Gegensatz zum Fall mit abelscher Gruppe nicht linear in ω ist. Yang-Mills-Theorien beschreiben solche nichtabelschen Eichtheorien. Sie bringen unter Verwendung der nun eichkovarianten Ableitung (und damit Gewährleistung lokaler Eichinvarianz des Lagrangian) aus der Wirkung $S = S[A] \sim \int trF_{jk}F^{jk}vol^n$ gegenüber den Maxwell-Gleichungen modifizierte Bewegungsgleichungen für elektrisches und magnetisches Feld hervor (für $n = 4$): Es ist jetzt $F_{jk} = \delta_j A_k - \delta_k A_j - iq[A_j, A_k]$. (Für eine ausführliche Gegenüberstellung von Maxwell- und Yang-Mills-Theorie siehe [27].)

Für $G = SU(2) \times U(1)$ und $G = SU(3)$ lassen sich über den Yang-Mills-Formalismus Eichtheorien für elektroschwache bzw. starke Wechselwirkung beschreiben, wie es im Standardmodell der Elementarteilchen geschieht.

Dieses Kapitel liefert angelehnt an [34] wichtige Definitionen. Insbesondere die Begriffe des (eichinvarianten) Yang-Mills-Zusammenhanges/Funktionals und der Yang-Mills-Gleichung bilden wichtige Grundlagen für das sich anschließende Kapitel.

7.1 Yang-Mills-Zusammenhänge und die Yang-Mills-Gleichung

Proposition 7.1.1. *Sei G eine Lie-Gruppe mit $Lie(G) = \mathscr{G}$. Ein Skalarprodukt heißt* ***Ad-invariant****, wenn gilt $\langle Ad(g)x, Ad(g)y\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall \ g \in G, x, y \in \mathscr{G}$. Ist außerdem G kompakt, so ist die Existenz eines Ad-invarianten Skalarproduktes auf $\mathscr{G}$ garantiert.*

Sei im Folgenden durch (P, π, M) ein G-Prinzipalbündel gegeben, wobei G kompakt und zusammenhängend. M sei eine geschlossene orientierte m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Volumenform dM, $dM_x = e^1 \wedge ... \wedge e^m$ in einer zur positiv orientierten Orthonormalbasis $\{E_1, ..., E_m\}$ von T_xM dualen Basis $\{e^1, ..., e^m\}$. Weiter sei $\langle \ , \ \rangle$ ein Ad-invariantes Skalarprodukt auf $\mathscr{G}$ und $Ad \ P = P \times_{Ad} \mathscr{G}$ das zu P assoziierte Vektorbündel. Definiere auf diesem eine Fasermetrik durch $\langle [p, x], [p, y]\rangle = \langle y, y\rangle$.

Seien außerdem Paarungen

$$(\alpha_1, \alpha_2) \in \Lambda^k(M) \times \Lambda^k(M) \mapsto \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \in C^\infty M, \tag{7.1}$$

$$(\eta_1, \eta_2) \in \Lambda^k(M, Ad\ P) \times \Lambda^k(M, Ad\ P) \mapsto \langle \eta_1, \eta_2 \rangle \in C^\infty(M) \tag{7.2}$$

so definiert, dass

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle(x) := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} \alpha_1(E_{i_1}, ..., E_{i_k})\alpha_2(E_{i_1}, ..., E_{i_k}),$$

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle(x) := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m} \eta_1(E_{i_1}, ..., E_{i_k})\eta_2(E_{i_1}, ..., E_{i_k}).$$

Für $\eta_1, \eta_2 \in \Lambda^k(M, Ad\ P), \eta_1 = \xi_1 \otimes \alpha_1, \eta_2 = \xi_2 \otimes \alpha_2$ mit $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(Ad\ P), \alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda^k(M)$, ist

$$\langle \xi_1 \otimes \alpha_1, \xi_2 \otimes \alpha_2 \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \tag{7.3}$$

Desweiteren sei $\|\eta\|^2 = \langle \eta, \eta \rangle \in C^\infty$ für $\eta \in \Lambda^k(M, Ad\ P)$.

Definition 7.1.2. *Das **Yang-Mills-Funktional** YM ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} YM &: \mathscr{C}(P) \to \mathbb{R}, \\ YM(\omega) &= \int_M \|\tilde{F}^\omega\|^2 dM. \end{aligned} \tag{7.4}$$

wobei $\tilde{F}^\omega \in \Lambda^2(P, Ad)$. Falls

$$\frac{d}{dt} YM(\omega + t\tilde{\eta})|_{t=0} = 0 \tag{7.5}$$

*für alle $\tilde{\eta} \in \Lambda^1(P, Ad)$, heißt ω **Yang-Mills-Zusammenhang**. Man sagt dann, ω sei **kritischer Punkt** von YM.*

Bemerkung 7.1.3. In Definition 7.1.2 wurde die Korrespondenz von $\Lambda^2(P, Ad) \ni \tilde{\eta}$ und $\Lambda^2(M, Ad\ P) \ni \eta$ aus Theorem 4.3.1 benutzt.

Falls $F^\omega = 0$, so heißt ω **flacher Zusammenhang**. In flachen Zusammenhängen hat YM ein globales Minimum, denn es gilt $YM \geq 0$. Also ist jeder flache Zusammenhang ein Yang-Mills-Zusammenhang.

Sei nun eine weitere Paarung definiert durch

$$\begin{aligned} (\eta, \theta) \in \Lambda^k(M, Ad\ P) \times \Lambda^l(M, Ad\ P) &\mapsto \langle \eta \wedge \theta \rangle \in \Lambda^{k+l}(M), \\ (\eta \wedge \theta)(v_1, ..., v_{k+l}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}\sigma \langle \eta(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}), \theta(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(l)}) \rangle \end{aligned} \tag{7.6}$$

mit $v_1, ..., v_{k+l} \in T_xM$. Für $\eta = \xi_1 \otimes \alpha, \theta = \xi_2 \otimes \beta$ mit ξ_1, ξ_2 wie oben und $\alpha \in \Lambda^k(M), \beta \in \Lambda^l(M)$ ist $\langle \eta \wedge \theta \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \langle \alpha, \beta \rangle$.
Der Hodge-Stern Operator ist speziell für k-Formen $\eta_1, \eta_2 \in \Lambda^k(M, Ad\ P)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} * &: \Lambda^k(M, Ad\ P) \to \Lambda^{m-k}(M, Ad\ P), \\ &\langle \eta_1, \eta_2 \rangle dM = \langle \eta_1 \wedge *\eta_2 \rangle. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Desweiteren sei

$$\begin{aligned} \mathscr{D}^\omega : \Lambda^{k+1}(M, Ad\ P) &\to \Lambda^k(M, Ad\ P), \\ \mathscr{D}^\omega \eta = (-1)^{mk+1} &* D^\omega * \eta. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Die Yang-Mills-Gleichungen ergeben sich nun als Euler-Langrange-Gleichungen aus dem Yang-Mills-Funktional. Hierfür ist nützlich, dass Folgendes gilt:

Theorem 7.1.4. *Es ist*

$$\int_M \langle D^\omega \eta, \theta \rangle dM = \int_M \langle \eta, \mathscr{D}^\omega \theta \rangle dM. \tag{7.9}$$

für $\eta \in \Lambda^k(M, Ad\ P), \theta \in \Lambda^k(M, Ad\ P)$.

Laut Definition 7.1.2 muss für Yang-Mills-Zusammenhänge (7.5) gelten. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} YM(\omega + t\tilde{\eta})\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_M \|\tilde{F}^{\omega+t\tilde{\eta}}\|^2 dM = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \int_M \langle \tilde{F}^{\omega+t\tilde{\eta}}, \tilde{F}^{\omega+t\tilde{\eta}} \rangle dM \\ &= \int_M \langle D^\omega \tilde{\eta}, \tilde{F}^\omega \rangle dM + \int_M \langle \tilde{F}^\omega, D^\omega \tilde{\eta} \rangle dM = 2 \int_M \langle \tilde{\eta}, \mathscr{D}^\omega \tilde{F}^\omega \rangle dM, \end{aligned} \tag{7.10}$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{\omega+t\tilde{\eta}} &= d(\omega + t\tilde{\eta}) + \frac{1}{2}[\omega + t\tilde{\eta}, \omega + t\tilde{\eta}] \\ &= d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] + td\tilde{\eta} + t[\omega, \tilde{\eta}] + \frac{t^2}{2}[\tilde{\eta}, \tilde{\eta}] \end{aligned} \tag{7.11}$$

und folglich

$$\frac{d}{dt} \tilde{F}^{\omega+t\tilde{\eta}}\Big|_{t=0} = D^\omega \tilde{\eta}. \tag{7.12}$$

Damit gilt folgendes

Theorem 7.1.5. $A \in \mathscr{C}(P)$ *ist genau dann ein Yang-Mills-Zusammenhang, wenn*

$$D^\omega * F^\omega = 0 \Leftrightarrow *D^\omega * F^\omega = 0 \Leftrightarrow \mathscr{D}^\omega F^\omega = 0. \tag{7.13}$$

7.2 Eichtransformationen

Sei im Folgenden (P, π, M) ein G-Bündel und

$$\mathfrak{G}(P) := \{\mu \in C^\infty(P, G) : \mu(p, g) = g^{-1}\mu(p)g,\ p \in P,\ g \in G\} \tag{7.14}$$

die Menge der ***G-äquivarianten*** Abbildungen.

Definition 7.2.1. *Eine **Transformation** von P ist ein Diffeomorphismus*

$$\begin{aligned} &f : P \to P, \\ &f(pg) = f(p)g \ \forall \ p \in P, \ g \in G. \end{aligned} \tag{7.15}$$

*Eine Transformation heißt **Eichtransformation**, wenn $\pi \circ f = \pi$. Die Gruppe der Eichtransformationen sei mit $\mathscr{G}(P)$ bezeichnet.*

Die Menge $\mathfrak{G}(P)$ ist mit punktweiser Multiplikation eine Gruppe. Es gilt folgendes

Theorem 7.2.2. *Es existiert ein kanonischer Isomorphismus von $\mathscr{G}(P)$ auf $\mathfrak{G}(P)$.*

Das Yang-Mills-Funktional kann als Abbildung $YM : \mathscr{C}(P)/\mathscr{G}(P) \to \mathbb{R}$ aufgefasst werden: Man kann zeigen, dass YM eichinvariant ist, das heißt, dass gilt $YM(f^*\omega) = YM(\omega)$ für alle $\omega \in \mathscr{C}(P)$, $f \in \mathscr{G}(P)$. Ferner gilt, dass falls $\omega \in \mathscr{C}(P)$ ein Yang-Mills-Zusammenhang ist, dann auch $f^*\omega$.

Kapitel 8

Yang-Mills-Lösungen auf homogenen Räumen

In diesem Kapitel wird angelehnt an [25], [48] nach Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen mit antisymmetrischer Torsion auf Coseträumen $(\mathbb{R} \times G/H, K)$ mit flacher Killing-Metrik K gesucht. Diese Räume werden als Basis des zum homogenen Bündel $P := (G \times (\mathbb{R} \times G/H), \pi, \mathbb{R} \times G/H)$ assoziierten Vektorbündels $\mathscr{E} = P \times_{Ad} \mathscr{G}$ mit Lie-Gruppen $G, H \subset G$, $Lie(G) =: \mathscr{G}$, $Lie(H) =: \mathscr{H}$ und Projektionsabbildung π aufgefasst. Für ein Aufstellen der Yang-Mills-Gleichungen ist zunächst die konkrete Ermittlung der Feldstärke 2- Form F auf $\mathbb{R} \times G/H$ erforderlich, $F = dA + A \wedge A$, wobei für die $\mathscr{G}$-wertige Zusamenhangs-1-Form A ein G-invarianter Ansatz gewählt wird. Ein Beweis für diesen wird in Abschnitt 8.4 gegeben. Durch Zurückziehen der Basis-1-Formen von $\mathbb{R} \times G$ auf $\mathbb{R} \times G/H$ lässt sich eine Basis von A, F auf $\mathbb{R} \times G/H$ gewinnen. Eine zusätzliche Unterteilung dieser Generatoren ermöglicht eine Modifikation der Yang-Mills Gleichungen und damit die gezielte Betrachtung spezieller Typen von Mannigfaltigkeiten: In Abschnitt 8.5 werden auf diese Weise α-Sasaki- und 3-Sasaki-Mannigfaltigkeiten hinsichtlich der Existenz analytischer Yang-Mills-Lösungen untersucht, im speziellen Sphären $S^{2n+1} = SU(n+1)/SU(n)$ und $S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n)$ mit den Beispielen S^5 bzw. S^7. Abschnitt 8.6 und 8.7 betrachten dyonische bzw. periodische Lösungen, welche man nach Übergang von euklidischer zu Lorentzmetrik bzw. Annahme eines endlichen Zeitintervalls/Berücksichtigung einer Periodizitätsbedingung unmittelbar aus denen der Abschnitte 8.5.1-8.5.4 erhält.

In [20] werden auf $\mathbb{R} \times M$ unter anderem auf Sasaki-Einstein- und 3-Sasaki-Mannigfaltigkeiten Instantonzusammenhänge konstruiert. Diese konstruieren sich, wie in Kapitel 8.8 erläutert werden wird, durch Störung des kanonischen Zusammenhanges und sind mit einer Schar von Metriken g_h kompatibel, welche im Fall von Sasaki-Einstein-Mannigfaltigkeiten $SU(n+1)/SU(n)$ nach Reskalierung der Generatoren eine α-Sasaki-Struktur beschreiben. Folglich können die Yang-Mills-Gleichungen im Fall $SU(n+1)/SU(n)$ alternativ aus der Instantongleichung abgeleitet werden. Auf diese Weise wird in Abschnitt 8.8.2 eine Bestätigung und Kontrolle der auf oben beschriebenem Weg ermittelten Gleichungen gegeben.

8.1 Lokale Basisfelder und -formen auf G-Bündeln

Sei $G \ni g$ eine kompakte, halb-einfache Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathscr{G}$ und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe von G so, dass G/H reduktiver homogener Raum ist. Es bezeichne $\mathscr{H}$ die Lie-Algebra von H. Es ist

$$\mathscr{G} = \mathscr{H} \oplus \mathscr{M}, \tag{8.1}$$

mit zu $\mathscr{H}$ orthogonalem Komplement $\mathscr{M}$. Mit $\{I_A\}$, $A, B, C = 1, ..., dim\mathscr{G}$, seien die Generatoren von $\mathscr{G}$ bezeichnet. Sie genügen der Kommutatorrelation

$$[I_A, I_B] = f_{AB}^C I_C \tag{8.2}$$

mit Strukturkonstanten f_{AB}^C. Wegen (8.1) ist $\{I_A\} = \{I_a\} \cup \{I_i\}$, wobei hier mit $\{I_a\}$ Generatoren von $\mathscr{M}$, $a, b, c = dim\mathscr{H} + 1, ..., dim\mathscr{M}$, und mit $\{I_i\}$ Generatoren von $\mathscr{H}$, $i, j, k = 1, ..., dim\mathscr{H}$ bezeichnet seien. Da $\mathscr{M}$ reduktiv ist, gelten für die $\{I_a\}$ und $\{I_i\}$ folgende Kommutatorrelationen:

$$\begin{aligned} [I_i, I_j] &= f_{ij}^k I_k \\ [I_a, I_b] &= f_{ab}^c I_c + f_{ab}^i I_i \\ [I_i, I_a] &= f_{ia}^b I_b \end{aligned} \tag{8.3}$$

Weil G halb-einfach und kompakt ist, ist die Cartan-Killing-Form K auf $\mathscr{G}$ nichtausgeartet sowie negativ definit; somit kann ihr Negatives wie eine Metrik zum Indexziehen verwendet werden. Insbesondere sind die Strukturkonstanten nun total antisymmetrisch unter Vertauschung ihrer Indizes (vgl. Kapitel 3.3). Die Generatoren $\{I_A\}$ seien im Folgenden so normiert, dass

$$K_{AB} = f_{AD}^C f_{CB}^D = \delta_{AB}. \tag{8.4}$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} K_{ij} &= f_{il}^k f_{kj}^l + f_{ia}^b f_{bj}^a = \delta_{ij}, \\ K_{ia} &= 0, \\ K_{ab} &= 2 f_{ad}^i f_{ib}^d + f_{ad}^c f_{cb}^d = \delta_{ab}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Sei nun $(G, \pi, G/H)$ ein Prinzipalbündel mit Strukturgruppe H und Projektion $\pi : G \to G/H$. $\sigma_U : U \subset G/H \to G$ bezeichne den lokalen Schnitt mit $\pi \circ \sigma_U = 1_U$. Um für die folgenden Betrachtungen eine Basis des Tangentialraumes an G/H angeben zu können, ist ein Rücktransport der Basis-1-Formen von T^*G nach $T^*(G/H)$ erforderlich. Eine Basis von TG lässt sich durch Identifikation von TG mit dem Raum der aus den Generatoren I_A erzeugten linksinvarianten Vektorfelder $\hat{E}_A$ (vgl. Kapitel 3.1), gewinnen. Die hierzu duale Basis $\{\hat{e}^A\}$ kann mit dem Pullback des lokalen Schnittes auf eine offene Untermenge U der Basismannigfaltigkeit G/H zurückgezogen werden. Man erhält dann über die Wirkung mit L_g eine linksinvariante Basis e^a für ganz $T^*(G/H)$. Deren Dual E^a sind dann die linksinvarianten Vektorfelder auf G/H. Die E_i bzw. die e^i sind jetzt nicht mehr linear unabhängig und es gilt $e^i = e_a^i e^a$ bzw. $E_i = E_i^a E_a$ mit

Komponenten e^i_a, E^a_i. Auf diese Weise kann die Metrik K auf $\mathscr{G}$ in eine G-invariante Metrik auf ganz $T(G/H)$ überführt werden. Es ist damit

$$K_{T(G/H)} = \delta_{ab} e^a \otimes e^b. \tag{8.6}$$

Für die zurückgezogenen linksinvarianten Basis-1-Formen $\{e^a, e^i\}$ gelten die Maurer-Cartan-Gleichungen

$$\begin{aligned} de^a &= -f^a_{ib} e^i \wedge e^b - \frac{1}{2} f^a_{bc} e^b \wedge e^c, \\ de^i &= -\frac{1}{2} f^i_{bc} e^b \wedge e^c - \frac{1}{2} f^i_{jk} e^j \wedge e^k. \end{aligned} \tag{8.7}$$

8.2 Die Yang-Mills-Gleichungen auf $\mathbb{R} \times G/H$

Im Folgenden sollen nun die Yang-Mills-Gleichungen auf $\mathbb{R} \times G/H$ speziell für den Fall eines G-invarianten Zusammenhanges konkret bestimmt werden:

Betrachte dazu das zum G-Bündel $P = ((\mathbb{R} \times G/H) \times G, \pi_P, \mathbb{R} \times G/H)$ assoziierte triviale Vektorbündel $\mathscr{E} := Ad\ P = P \times_{Ad} \mathscr{G}$ mit einer Metrik g auf $\mathbb{R} \times G/H$,

$$g = e^0 \otimes e^0 + \delta_{ab} e^a \otimes e^b. \tag{8.8}$$

Ein Zusammenhang auf $\mathbb{R} \times G/H$ setzt sich nun aus der lokalen Form eines linearen Zusammenhangs $\omega = (\omega^a_b)_c e^c$ des Tangentialbündels $(T(\mathbb{R} \times G/H), \pi_T, \mathbb{R} \times G/H)$ und der eines Eichzusammenhangs $A \in \Lambda^1(\mathscr{E}, \mathscr{G})$,

$$A = A_0 e^0 + A_A e^A,\ F = F_{0a} e^o \wedge e^a + \frac{1}{2} F_{ab} e^a \wedge e^b \tag{8.9}$$

mit Feldstärke $F = D^A A$ zusammen.

Wahl eines G-invarianten Eichzusammenhanges und Bestimmung dessen Feldstärke. Im Weiteren werde eine Eichung $A_0 = 0$ gewählt. Ferner sei A zusätzlich G-invariant[1] so, dass

$$A = X_a e^a + I_i e^i. \tag{8.10}$$

Für die folgenden Betrachtungen soll angenommen werden, dass $X^i_a = 0$. G-Invarianz wird zum Beispiel durch die Wahl

$$A = A_a e^a = (e^i_a I_i + \Phi I_a) e^a \tag{8.11}$$

gewährleistet, wobei $\Phi I_a =: X_a$ und $\Phi = \Phi(t)$ eine Funktion, denn mit (8.11) erfüllt X_a die G-Invarianzbedingung

$$[I_i, X_a] = f^b_{ia} X_b. \tag{8.12}$$

[1]Eine $\mathscr{G}$-wertige Zusammenhangs-1-Form $A \in \Lambda^1(P, \mathscr{G})$ auf einem Hauptfaserbündel P heißt G-invariant, wenn sie unter dem Pullback mit der Wirkung von G invariant bleibt. Für Weiterführendes bezüglich G-invarianter Zusammenhänge siehe Abschnitt 8.4.

Für einen Beweis siehe Abschnitt 8.4.

Der explizite Ausdruck für F berechnet sich mit (8.12) in einer Orthonormalbasis $\{E_0 := \frac{\partial}{\partial t}, E_a\}$ für $T(\mathbb{R} \times G/H)$ bzw. $\{e^0 := dt, e^a\}$ für $T^*(\mathbb{R} \times G/H)$ wie folgt:
Es ist

$$\begin{aligned} dA =& d\left(e^i I_i + X_a e^a\right) = de_i I_i + dX_a e^a + X_a de^a \\ =& - I_i \left(\frac{1}{2} f^i_{bc} e^b \wedge e^c + \frac{1}{2} f^i_{jk} e^j \wedge e^k\right) + dX_a e^a \\ & - X_a \left(f^a_{ib} e^i \wedge e^b + \frac{1}{2} f^a_{bc} e^b \wedge e^c\right) \\ =& - \frac{1}{2} I_i f^i_{bc} e^b \wedge e^c - \frac{1}{2} X_a f^a_{bc} e^b \wedge e^c - \frac{1}{2} I_i f^i_{jk} e^j \wedge e^k - X_a f^a_{ib} e^i \wedge e^b \\ & + \dot{X}_a e^0 \wedge e^a, \end{aligned} \tag{8.13}$$

wegen $dX_a e^a = E_\beta X_a e^\beta \wedge e^a = \dot{X}_a e^0 \wedge e^a$ mit $\dot{X}_a = \frac{\partial}{\partial t} X_a$, und

$$\begin{aligned} [A \wedge A] =& [A \wedge A]_{ab} e^a \wedge e^b = \frac{1}{2}[A_a, A_b] \otimes e^a \wedge e^b \\ =& \frac{1}{2}[e^i_a I_i + X_a, e^j_b I_j + X_b] \otimes e^a \wedge e^b \\ =& \frac{1}{2}\left(e^i_a e^j_b [I_i, I_j] + e^i_a [I_i, X_b] + e^j_b [X_a, I_j] + [X_a, X_b]\right) \otimes e^a \wedge e^b \\ =& \frac{1}{2}[I_i, I_j] \otimes e^i \wedge e^j + \frac{1}{2}[I_i, X_b] \otimes e^i \wedge e^b + \frac{1}{2}[X_a, I_j] \otimes e^a \wedge e^j \\ & + \frac{1}{2}[X_a, X_b] \otimes e^a \wedge e^b \\ =& \frac{1}{2} f^i_{jk} I_i \otimes e^j \wedge e^k + f^a_{ib} X_a \otimes e^i \wedge e^b + \frac{1}{2}[X_a, X_b] \otimes e^a \wedge e^b. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Damit ist

$$F = \underbrace{\dot{X}_b}_{F_{0b}} e^0 \wedge e^b - \frac{1}{2} \underbrace{\left(f^i_{bc} I_i + f^a_{bc} X_a - [X_b, X_c]\right)}_{F_{bc}} e^b \wedge e^c. \tag{8.15}$$

Wahl eines linearen Zusammenhanges. Der lineare Zusammenhang ω ist über seine Torsion $T = (T^a) = T^a_{bc} e^b \otimes e^c$ charakterisiert. Wähle dazu im Folgenden den Ansatz

$$T^a_{bc} = \kappa f^a_{bc} \tag{8.16}$$

wobei $\kappa \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$T^a = \frac{1}{2} \kappa f^a_{bc} e^b \wedge e^c. \tag{8.17}$$

Mit der Annahme, dass

$$\omega^b_a = f^a_{ib} e^i \tag{8.18}$$

wird die erste Gleichung in (8.7) zu

$$de^a + \omega^b_a \wedge e^b = T^a, \tag{8.19}$$

und weiter

$$f^a_{bi} e^b \wedge e^i - \frac{1}{2} f^a_{bc} e^b \wedge e^c + \omega^a_b \wedge e^b = \frac{1}{2} \kappa f^a_{bc} e^b \wedge e^c$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\kappa + 1) f^a_{bc} e^c + f^a_{ib} e^i = \omega^b_a$$

Damit sind die Komponenten des linearen Zusammenhanges gegeben durch

$$\omega^a_{cb} = e^i_c f^a_{ib} + \frac{1}{2} (\kappa + 1) f^a_{cb}. \tag{8.20}$$

Die Yang-Mills-Gleichungen mit Torsion (vgl. (1.8)) sind allgemein auf einer d-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M gegeben durch [25]

$$d * F + A \wedge *F - *F \wedge A + *H \wedge F = 0, \tag{8.21}$$

mit $A \in \Lambda^1(M, \mathscr{G})$, $F = DA \in \Lambda^2(M, \mathscr{G})$. H ist hierbei die Torsions-3-Form definiert durch

$$H = (-1)^{3(d-3)} * d\Sigma \tag{8.22}$$

mit einer $(d-4)$-Form Σ auf M. Mit Theorem 7.1.5 folgt aus $D^A * F = 0$ durch erneutes Anwenden von $*$, dass $[*D^A*F]^b = \partial_a F^{ab} + [A_a, F^{ab}] = 0 \Leftrightarrow D^A*F = d*F + [A, *F] = 0$. Andererseits gilt wegen der Bianchi-Identität, dass (anti)selbstduale Zusammenhänge mit $*F = \pm F$ Lösungen der Yang-Mills-Gleichung sind. Verallgemeinert man die (Anti-)Selbstdualitätsrelation durch

$$*F = -\Sigma \wedge F, \tag{8.23}$$

was der Instantongleichung entspricht, so ergibt sich

$$D^A(*F) = -D^A(\Sigma \wedge F) = -d\Sigma \wedge F - \Sigma \wedge D^A F = - * H \wedge F \tag{8.24}$$

und damit die Gleichungen (8.21).

Alternativ lassen sich die Yang-Mills-Gleichungen als Bewegungsgleichungen aus der Wirkung S herleiten,

$$S = \int_M tr\left(F \wedge *F + *H \wedge (dA \wedge A + \frac{2}{3}A^3)\right) - \int_M d\left(\Sigma \wedge tr(A \wedge dA + \frac{2}{3}A^3)\right), \tag{8.25}$$

Beachte, dass der zweite Term in (8.25) rein topologischer Natur ist. Insbesondere in der Stringtheorie ist er im Rahmen heterotischer Stringkompaktifizierung von Bedeutung, siehe beispielweise [5]. Für geschlossene Σ verschwindet der Torsionsterm in (8.21) und es ergeben sich die Yang-Mills-Gleichungen ohne Torsion.

Wähle im Folgenden für H einen Ansatz

$$H := \frac{1}{6} T_{abc} e^a \wedge e^b \wedge e^c, H_{abc} = T_{abc} = \kappa f_{abc}. \tag{8.26}$$

Die Yang-Mills-Gleichungen auf $\mathbb{R} \times G/H$ sind damit gegeben durch

$$E_a F^{a0} + \omega^a_{ab} F^{b0} + [A_a, F^{a0}] = 0, \tag{8.27}$$
$$E_0 F^{0b} + E_a F^{ab} + \omega^d_{da} F^{ab} + \omega^b_{cd} F^{cd} + [A_a, F^{ab}] = 0. \tag{8.28}$$

Explizite Berechnung der Yang-Mills-Terme. Es ist

$$\begin{aligned} E_a F^{a0} &= 0, \\ \omega^a_{ab} F^{b0} &= -e^i_a f^a_{ib} \dot{X}_b, \\ [A_a, F^{a0}] &= -e^i_a f^b_{ia} \dot{X}_b - [X_a, \dot{X}^a] = 0. \end{aligned} \tag{8.29}$$

Damit folgt aus (8.27)

$$[X_a, \dot{X}^a] = 0. \tag{8.30}$$

Für die restlichen Terme erhält man

$$\begin{aligned} E_0 F^{0b} =& \ddot{X}_b, \\ E_a F^{ab} =& 0, \\ \omega^d_{da} F^{ab} =& \left(e^i_d f^d_{ia} + \frac{1}{2} (\kappa + 1) \underbrace{f^d_{da}}_{=0} \right) \left(-f^{abj} I_j - f^{abc} X_c + [X^a, X^b] \right) \\ =& - e^i_d f^d_{ia} f^{abj} I_j - e^i_d f^d_{ia} f^{abc} X_c + e^i_d f^d_{ia} [X^a, X^b], \\ \omega^b_{cd} F^{cd} =& \left(e^i_c f^b_{id} + \frac{1}{2} (\kappa + 1) f^b_{cd} \right) \left(-f^{cdj} I_j - f^{cda} X_a + [X^c, X^d] \right) \\ =& - e^i_c f^b_{id} f^{cdj} I_j - e^i_c f^b_{id} f^{cda} X_a + e^i_c f^b_{id} [X^c, X^d] \\ & - \frac{1}{2} (\kappa + 1) f^b_{cd} f^{cdj} I_j - \frac{1}{2} (\kappa + 1) f^b_{cd} f^{cda} X_a + \frac{1}{2} (\kappa + 1) f^b_{cd} [X^c, X^d], \\ [A_a, F^{ab}] =& [e^i_a I_i + X_a, -f^{abj} I_j - f^{abc} X_c + [X^a, X^b]] \\ =& - e^i_a [I_i, f^{abj} I_j] - e^i_a [I_i, f^{abc} X_c] + e^i_a [I_i, [X^a, X^b]] \\ & - f^{abj} [X_a, I_j] - f^{abc} [X_a, X_c] + [X_a, [X^a, X^b]] \\ =& - e^i_a f^{abj} f^k_{ij} I_k - e^i_a f^{abc} f^d_{ic} X_d + e^i_a \left(-[X_a, [X^b, I_i]] - [X^b, [I_i, X^a]] \right) \\ & - f^{abj} f^c_{aj} X_c - f^{abc} [X_a, X_c] + [X_a, [X^a, X^b]] \\ =& - e^i_a f^{abj} f^k_{ij} I_k - e^i_a f^{abc} f^d_{ic} X_d - e^i_a f^{bc}_i [X_a, X_c] - e^i_a f^{ac}_i [X^b, X_c] \\ & - f^{abj} f^c_{aj} X_c - f^{abc} [X_b, X_c] + [X_a, [X^a, X^b]]. \end{aligned} \tag{8.31}$$

Damit ergibt sich für (8.28)

$$\begin{aligned} \ddot{X}_b & - e^i_d f^d_{ia} f^{abj} I_j - e^i_d f^d_{ia} f^{abc} X_c + e^i_d f^d_{ia} [X^a, X^b] \\ & - e^i_c f^b_{id} f^{cdj} I_j - e^i_c f^b_{id} f^{cda} X_a + e^i_c f^b_{id} [X^c, X^d] \\ & - \frac{1}{2} (\kappa + 1) f^b_{cd} f^{cda} X_a + \frac{1}{2} (\kappa + 1) f^b_{cd} [X^c, X^d] \\ & - e^i_a f^{abj} f^k_{ij} I_k - e^i_a f^{abc} f^d_{ic} X_d - e^i_a f^{bc}_i [X^a, X_c] - e^i_a f^{ac}_i [X^b, X_c] \\ & - f^{abi} f^c_{ai} X_c - f^{abc} [X_a, X_c] + [X_a, [X^a, X^b]] = 0. \end{aligned}$$

Die Yang-Mills-Gleichungen sind also in expliziter Form gegeben durch

$$\begin{aligned} \ddot{X}_b & - \left(\frac{1}{2} (\kappa + 1) f_{bcd} f_{acd} - f_{bcj} f_{acj} \right) X_a \\ & + \frac{1}{2} (\kappa + 3) f_{bcd} [X_c, X_d] + [X_a, [X^a, X^b]] = 0. \end{aligned} \tag{8.32}$$

8.3 Modifizierte Yang-Mills-Gleichungen auf $\mathbb{R} \times G/H$

Um die bisherige Herleitung der Yang-Mills-Gleichungen auf nicht näher spezifizierten Cosets $M = G/H$ auf solche mit spezieller Geometrie zu konkretisieren, ist eine Unterteilung der Menge der Generatoren I_a erforderlich. Nehme dazu im Folgenden eine Aufspaltung des Indexbereiches $\{a, b, c, ...\}$ vor,

$$\{a\} = \{a'\} \cup \{a''\}, \tag{8.33}$$

analog für $b, c, ...$. Damit ergeben sich nun entsprechend modifizierte Yang-Mills-Gleichungen. Insbesondere entspricht eine Unterteilung der Form (8.33) dem Fall, dass M α-Sasaki oder 3-Sasaki ist. Ab Kapitel 8.5.1 werden Yang-Mills-Lösungen auf solchen Mannigfaltigkeiten beispielhaft studiert.

Mit (8.33) wird (8.32) zu

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_{b'} = & \left(\frac{1}{2}(\kappa+1) f_{b'cd} f_{a'cd} - f_{b'cj} f_{a'cj}\right) X_{a'} + \left(\frac{1}{2}(\kappa+1) f_{b'cd} f_{a''cd} - f_{b'cj} f_{a''cj}\right) X_{a''} \\
& - \frac{1}{2}(\kappa+3)\left\{f_{b'c'd'}[X_{c'}, X_{d'}] + f_{b'c'd''}[X_{c'}, X_{d''}]\right\} \\
& - \frac{1}{2}(\kappa+3)\left\{f_{b'c''d'}[X_{c''}, X_{d'}] + f_{b'c''d''}[X_{c''}, X_{d''}]\right\} \\
& - [X_{a'}, [X^{a'}, X^{b'}]] - [X_{a''}, [X^{a''}, X^{b'}]].
\end{aligned} \tag{8.34}$$

Die Lösung der G-Invarianz-Bedingung wird nun gewährleistet durch

$$X_{a'} = \tilde{\Phi} I_{a'}, \tag{8.35}$$
$$X_{a''} = \tilde{\Psi} I_{a''}, \tag{8.36}$$

mit Funktionen $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(t), \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}(t)$[2]. Darüber hinaus gelte

$$f_{a'cd} f_{b'cd} = \alpha' \delta_{a'b'} \text{ bzw } f_{a''cd} f_{b''cd} = \alpha'' \delta_{a''b''}\ , \tag{8.37}$$
$$f_{a'ci} f_{b'ci} = \frac{1}{2}\left(1-\alpha'\right) \delta_{a'b'} \text{ bzw } f_{a''ci} f_{b''ci} = \frac{1}{2}\left(1-\alpha''\right) \delta_{a''b''}. \tag{8.38}$$

Es wird nun angenommen, dass diese Relationen bereits für Summation über nur eine Untermenge der Indexmenge erfüllt sind, da dies für viele homogene Räume gilt, insbesondere für jene, die in dieser Arbeit betrachtet werden. Es soll also gelten

$$\begin{aligned}
f_{b'c'd'} f_{e'c'd'} = \alpha'_1 \delta_{b'e'},\ & f_{b'c'd''} f_{e'c'd''} = \alpha'_2 \delta_{b'e'}, \\
f_{b'c''d''} f_{e'c''d''} = \alpha'_3 \delta_{b'e'},\ & f_{b'a'j} f_{e'a'j} = \alpha'_5 \delta_{b'e'}, \\
f_{b'a''j} f_{e'a''j} = \alpha'_7 \delta_{b'e'},\ & f_{b''c'd'} f_{e''c'd'} = \alpha''_1 \delta_{b''e''}, \\
f_{b''c'd''} f_{e''c'd''} = \alpha''_2 \delta_{b''e''}\ & f_{b''c''d''} f_{e''c''d''} = \alpha''_3 \delta_{b''e''}, \\
f_{b''a'j} f_{e''a'j} = \alpha''_5 \delta_{b''e''}\ & f_{b''a''j} f_{e''a''j} = \alpha''_7 \delta_{b''e''}.
\end{aligned} \tag{8.39}$$

[2]Die Tilde über den Funktionen Φ, Ψ wird hier vorausschauend unter dem Aspekt eingeführt, dass später für die Existenz eines gemeinsamen Potentials $V(\Phi, \Psi)$ eventuell Reskalierungen $\tilde{\Phi} = f\Phi(\mu t), \tilde{\Psi} = g\Psi(\mu t)$ mit reellen Konstanten f, g, μ erforderlich werden, siehe Kapitel 8.5.

Außerdem ist

$$f_{b'xy}f_{e''xy} = 0,\ f_{b'xy}f_{jxy} = 0,\ f_{b''xy}f_{jxy} = 0, \tag{8.40}$$

wobei $x, y \in \{a^{'}, a^{''}, i\}$.

Damit ergeben sich die modifzierten Yang-Mills-Gleichungen, siehe Anhang A,

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{\Phi}} =& \frac{1}{2}\alpha^{'}(\kappa+2)\tilde{\Phi} - \frac{1}{2}\tilde{\Phi} - \left(\frac{1}{2}\kappa + \frac{3}{2}\right)\left(\tilde{\Phi}^2\alpha_1^{'} + 2\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}\alpha_2^{'} + \tilde{\Psi}^2\alpha_3^{'}\right) \\ &+ \tilde{\Phi}^3\left(\alpha_1^{'} + \alpha_2^{'} + \alpha_5^{'}\right) + \tilde{\Phi}\tilde{\Psi}^2\left(\alpha_2^{'} + \alpha_3^{'} + \alpha_7^{'}\right), \end{aligned} \tag{8.41}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{\Psi}} =& \frac{1}{2}\alpha^{''}(\kappa+2)\tilde{\Psi} - \frac{1}{2}\tilde{\Psi} - \left(\frac{1}{2}\kappa + \frac{3}{2}\right)\left(\tilde{\Psi}^2\alpha_3^{''} + 2\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}\alpha_2^{''} + \tilde{\Phi}^2\alpha_1^{''}\right) \\ &+ \tilde{\Psi}^3\left(\alpha_3^{''} + \alpha_2^{''} + \alpha_7^{''}\right) + \tilde{\Psi}\tilde{\Phi}^2\left(\alpha_2^{''} + \alpha_1^{''} + \alpha_5^{''}\right). \end{aligned} \tag{8.42}$$

8.4 Vertiefendes zur G-Invarianz-Bedingung

Die bisherigen Betrachtungen und Analysen bauten stets auf der voraussetzenden Annahme auf, dass (8.11) der allgemeinste Ansatz ist, der die G-Invarianz-Bedingung (8.12) löst. Ein Beweis, dass dies tatsächlich der Fall ist, blieb aus. Im Folgenden soll ein Ansatz wie (8.11) als allgemeinst mögliche Form eines G-invarianten Zusammenhanges gerechtfertigt werden, indem zunächst auf eine nützliche Relation zwischen der Menge der G-invarianten Zusammenhänge und einer bestimmten Menge von Lie-Algebra-Homomorphismen verwiesen sei (vgl. [32]). Unter Ausnutzung dieser lässt sich dann für den Spezialfall des zu $P = ((\mathbb{R} \times G/H) \times G, \pi_P, \mathbb{R} \times G/H, G)$ assoziierten Vektorbündels $\mathscr{E}$ ein G-invarianter Zusammenhang konstruieren (vgl. [25]), dessen Komponenten sich explizit bestimmen lassen. Dies wird anhand des Beispiels $G/H = SU(3)/SU(2)$ nachvollzogen.

8.4.1 G-invariante Zusammenhänge

Im Folgenden bezeichne $(P, \pi, M, G; K)$ ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe G und einer auf diesem wirkenden Gruppe K von Automorphismen. Sei $J := \{k \in K | kx_0 = x_0 \text{ für } x_0 = \pi(p_0),\ p_0 \in P\}$. Desweiteren existiere für alle $j \in J$ ein $a \in G$ derart, dass $jp_0 = p_0 a$. Sei außerdem λ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus $\lambda : J \to G$ so, dass $\lambda(j) = a$ für $j \in J,\ a \in G$. Der induzierte Lie-Algebren-Homomorphismus $\mathscr{J} \to \mathscr{G}$ sei ebenfalls mit λ bezeichnet.

Proposition 8.4.1. *Sei ω die Zusammenhangs-1-Form eines K-invarianten Zusammenhangs auf P. Definiere $\Lambda : \mathscr{K} \to \mathscr{G}$ so, dass*

$$\Lambda(X) = \omega_{u_0}(\tilde{X}). \tag{8.43}$$

Hierbei ist $\tilde{X}$ das durch $X \in \mathscr{K}$ induzierte Vektorfeld. Dann gelten folgende Relationen:

(GI1) $\Lambda(X) = \lambda(X)$ *für* $X \in \mathscr{J}$

(GI2) $\Lambda(\mathfrak{ad}_j X) = \mathfrak{ad}_{\lambda(j)} \Lambda(X)$ *für* $j \in J,\ X \in \mathscr{K}$

$\mathfrak{ad}_j$ und $\mathfrak{ad}_{\lambda(j)}$ sind dabei die adjungierten Darstellungen von J und G in $\mathscr{K}$ bzw. $\mathscr{G}$, vgl. (3.38).

Eine solche Abbildung Λ mit Eigenschaften *(GI1)* und *(GI2)* lässt sich für K-invariante Zusammenhänge immer finden; es gibt sogar eine eineindeutige Zuordnung:

Theorem 8.4.2. *Seien P und J wie oben und K eine zusammenhängende Lie-Gruppe, die transitiv auf M wirkt. Dann existiert eine 1:1-Korrespondenz zwischen der Menge der K-invarianten Zusammenhänge auf P und der Menge der linearen Abbildungen Λ mit (GI1) und (GI2) so, dass*

$$\Lambda(X) = \omega_{u_0}(\tilde{X}). \tag{8.44}$$

$\tilde{X}$ ist wieder das durch $X \in \mathscr{K}$ induzierte Vektorfeld. Existiert sogar eine Zerlegung von $\mathscr{K}$ derart, dass $\mathscr{K} = \mathscr{J} \oplus \mathscr{M}$ mit einem Unterraum $\mathscr{M}$ von $\mathscr{K}$ und $\mathfrak{ad}_J \mathscr{M} = \mathscr{M}$,

dann existiert besagte Korrespondenz bezüglich des auf $\mathscr{M}$ eingeschränkten Λ, $\Lambda_{\mathscr{M}}$,

$$\begin{aligned} &\Lambda_{\mathscr{M}} : \mathscr{M} \to \mathscr{G}, \\ &\Lambda_{\mathscr{M}}(\mathfrak{ad}_j X) = \mathfrak{ad}_{\lambda(j)}\left(\Lambda_{\mathscr{M}}(X)\right), \ X \in \mathscr{M}, \ j \in J, \end{aligned} \tag{8.45}$$

in der Form, dass

$$\Lambda(X) = \begin{cases} \lambda(X), \ X \in \mathscr{J}, \\ \Lambda_{\mathscr{M}}(X), \ X \in \mathscr{M}. \end{cases} \tag{8.46}$$

Sei nun im Speziellen $P = ((\mathbb{R} \times G/H) \times G, \pi, \mathbb{R} \times G/H, G; G)$ das G-Bündel über $\mathbb{R} \times G/H$ mit $K = G$ und $\mathscr{G} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{H}$, wobei $\mathscr{M}$ Unterraum von $\mathscr{G}$. Sei A die $\mathscr{G}$-wertige Zusammenhangs-1-Form eines G-invarianten Zusammenhangs auf P. Lokal schreibt sich A als

$$A = X_i e^i + X_a e^a. \tag{8.47}$$

Die $\mathscr{G}$-wertigen Koeffizienten X_i, X_a lassen sich nun wegen Theorem 8.4.2 über Λ ausdrücken unter Berücksichtigung von (8.46). Mit der Wahl $\lambda = id_H$, vgl. [25], ergibt sich damit

$$\begin{aligned} X_a &= \Lambda(I_a) = \Lambda_{\mathscr{M}}(I_a) = X_a^B I_B = X_a^b I_b + X_a^i I_i, \\ X_i &= \Lambda(I_i) = \lambda(I_i) = I_i. \end{aligned}$$

Unter der vereinfachenden Annahme $X_a^i = 0$ ist dann

$$A = I_i e^i + X_a^b I_b e^a. \tag{8.48}$$

Die Forderung nach G-Invarianz von A führt auf die Bedingung (8.12),

$$[I_i, X_a] = f_{ia}^b X_b \in \mathscr{M}. \tag{8.49}$$

Für die ausführliche Rechnung siehe Anhang C.

8.4.2 Lösen der G-Invarianz-Bedingung

Für die Bestimmung der $\mathscr{M}$-wertigen Komponenten X_a des G-invarianten Zusammenhangs A ist zunächst die Wahl einer Darstellung von $\mathscr{M}$ notwendig (vgl. [25]). Nehme dazu an, dass das Vektorbündel $\mathscr{E} = P \times_\rho \mathscr{G}$ vermittels $\rho = Ad$ zu P assoziiert sei. Die Generatoren von G lassen sich dann als $dimG \times dimG$ Matrizen schreiben,

$$\begin{aligned} I_i &= (I_{iA}^B) = (f_{ij}^k) \oplus (f_{ia}^b), \\ I_a &= (I_{aB}^C). \end{aligned} \tag{8.50}$$

Die adjungierte Darstellung von $\mathscr{H}$ in $\mathscr{G}$ zerfällt damit in

$$\mathfrak{ad}_{\mathscr{H}}(\mathscr{G}) = \mathfrak{ad}_{\mathscr{H}}(\mathscr{H}) \oplus R_{\mathscr{H}}. \tag{8.51}$$

Hierbei bezeichnet R eine reduzible Darstellung. Laut (8.49) transformieren nun die $X_a \in \mathscr{M}$ unter eben dieser Darstellung von $\mathscr{H}$, $R_{\mathscr{H}}$, mit $(R_{I_i})_a^b = f_{ia}^b$.

Weil R nach Annahme reduzibel ist, lässt es sich als Summe irreduzibler Darstellungen schreiben,

$$R = \sum_{p=1}^{q} R_p. \tag{8.52}$$

R erzeugt die gleiche Darstellung von $\mathscr{H}$ in $\mathscr{M}$ wie die Generatoren I_a; daher kann für jeden irredzuziblen Block R_p eine komplexe Linearkombination I_α der I_a angesetzt werden, wobei $\alpha_p = 1, ..., dim\ R_p$. Innerhalb eines solchen Blocks gilt:

$$[I_i, I_{\alpha_p}^{(p)}] = f_{i\alpha_p}^{\beta_p} I_{\beta_p}^{(p)} \tag{8.53}$$

Der Wechsel von Generatoren I_a zu I_α kann zum Beispiel (wie hier im Weiteren) durch einen Wechsel in die Cartan-Weyl-Basis erfolgen. Da die X_a gemäß (8.49) genau so transformieren wie die I_a, ergeben sie sich für jeden Block aus $X_{\alpha_p}^{(p)} = \Phi_p I_{\alpha_p}^{(p)}$ und die Gleichungen der G-Invarianz Bedingung entkoppeln gemäß

$$[I_i, X_{\alpha_p}^{(p)}] = f_{i\alpha_p}^{\beta_p} X_{\beta_b}^{(p)} \tag{8.54}$$

in q irreduzible Blöcke, was auf Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_q$ für eine entsprechende Anzahl von Yang-Mills-Gleichungen führt. Die ursprünglichen Generatoren X_a ergeben sich aus den X_{α_p} per

$$\{X_a\} = \left\{ \frac{1}{2} \left(X_{\alpha_p}^{(p)} - \bar{X}_{\alpha_p}^{(p)} \right), \frac{1}{2i} \left(X_{\alpha_p}^{(p)} + \bar{X}_{\alpha_p}^{(p)} \right) \right\}. \tag{8.55}$$

und lassen sich sofort in (8.32) einsetzen.

8.4.3 Beispiel: $S^5 = SU(3)/SU(2)$

Die 8-dimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{su}(3)$ wird aufgespannt von Generatoren $\{I_i, I_{a'}, I_{a''}\}$ mit $\{i\} = \{6, 7, 8\}$ stellvertretend für die $\mathfrak{su}(2)$-Unteralgebra, $\{a^{'}\} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\{a^{''}\} = \{5\}$,

$$I_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \frac{i}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$I_4 = \frac{-i}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, I_5 = \frac{i}{6} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$I_6 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, I_7 = \frac{i}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, I_8 = \frac{i}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8.56}$$

Damit schreibt sich der Wechsel in die Cartan-Weyl-Basis $\{L_1^\pm, L_2^\pm, L_3^\pm, h_1, h_2\}$ folgendermaßen:

$$L_1^\pm = I_2 \pm iI_1, L_2^\pm = I_4 \pm iI_3, L_3^\pm = I_7 \pm iI_6, h_1 = I_8, h_2 = I_5 \tag{8.57}$$

Zur Ermittlung der irreduziblen Blöcke R_p wird die adjungierte Darstellung von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{G}$ für jeden Generator von H einzeln berechnet, siehe Anhang D. Offensichtlich findet man drei irreduzible Blöcke für den Coset, welche jeweils mit einer komplexwertigen Funktion, Φ, Ψ, χ, versehen werden [3]. Für die X_α erhält man folglich

$$X_1^+ = \tfrac{\Phi}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_1^- = \tfrac{\Psi}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2^+ = \tfrac{\Phi}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$X_2^- = \tfrac{\Psi}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \tfrac{\chi}{6} \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Für $\Phi^\dagger = \Psi$ ist $X_\alpha^+ = -\left(X_\alpha^-\right)^\dagger$ und die Rekombination erfolgt gemäß

$$\{X_a\} = \left\{ \frac{1}{2i}\left(X_\alpha^+ - X_\alpha^-\right), \frac{1}{2}\left(X_\alpha^+ + X_\alpha^-\right) \right\}. \tag{8.58}$$

Man erhält die X_a,

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Psi \\ 0 & 0 & 0 \\ \Phi & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \frac{i}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Psi \\ 0 & 0 & 0 \\ \Phi & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -\Psi & 0 \\ \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ X_4 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & \Psi & 0 \\ \Phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_5 = \frac{i\chi}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{8.59}$$

Diese lösen die $SU(3)$-Invarianz Bedingung. Die Bewegungsgleichungen lauten damit

$$\ddot{\Phi} = \frac{\kappa}{4}\Phi - \frac{3+\kappa}{4}\Phi\chi + \frac{\Phi\chi^2}{4} + \frac{\Phi^2\Phi^\dagger}{2} \tag{8.60}$$

$$\ddot{\Phi}^\dagger = \frac{\kappa}{4}\Phi^\dagger - \frac{3+\kappa}{4}\chi\Phi^\dagger + \frac{\chi^2\Phi^\dagger}{4} + \frac{\left(\Phi^\dagger\right)^2\Phi}{2} \tag{8.61}$$

$$\ddot{\chi} = \frac{1+\kappa}{2}\chi - \frac{3+\kappa}{2}\Phi\Phi^\dagger + \Phi\Phi^\dagger\chi \tag{8.62}$$

Man sieht, dass sich für reelle Φ, χ wieder die Gleichungen wie in (8.5.1) ergeben.

[3]Streng genommen müssten diese Funktionen hier wieder mit einer Tilde versehen werden; da speziell in diesem Abschnitt aber die Existenz eines Potentials ohne Belang und Reskalierung damit nicht erforderlich sein wird, wird die Tilde hier zum Zwecke einer vereinfachenden Schreibweise unterdrückt.

8.5 Yang-Mills-Lösungen auf höherdimensionalen Sphären

In diesem Abschnitt werden die Yang-Mills-Gleichungen (8.41) bzw. (8.42) konkret auf den Sphären $S^5 \cong SU(3)/SU(2), S^{2n+1} \cong SU(n+1)/SU(n)$, $S^7 \cong Sp(2)/Sp(1)$, $S^{4n+3} \cong Sp(n+1)/Sp(n)$ hergeleitet. Zur Bestimmung der $\alpha_i^{'}, \alpha_i^{''}, \alpha_{a'}^{'}, \alpha_{a'}^{''}, \alpha_{a''}^{'}, \alpha_{a''}^{''}$ ist hierfür zunächst eine geeignete Wahl der Basis erforderlich. Die sich ergebenden Yang-Mills-Gleichungen werden so reskaliert, dass sich ein gemeinsames Potential $V = V(\kappa)$ angeben lässt. Anschließend wird analytisch nach Lösungen endlicher Wirkung gesucht. Diese verbinden kritische Punkte (Φ_i, Ψ_i) und (Φ_j, Ψ_j), für die gilt $\frac{\partial V}{\partial \Phi_i} = \frac{\partial V}{\partial \Psi_i} = 0$ und $V(\Phi_i, \Psi_i, \kappa) = V(\Phi_j, \Psi_j, \kappa)$. Eine Auflistung der gefundenen Lösungen in Abhängigkeit von κ wird in allen vier Fällen gegeben.

8.5.1 Beispiel: $S^5 \cong SU(3)/SU(2)$

Die durch (8.56) erzeugte Basis von $\mathfrak{su}(3)$ ist antihermitesch mit Normierungsfaktoren derart, dass 8.4 erfüllt ist. Die Strukturkonstanten sind bezogen auf diese Basis gegeben durch

$$f_{678} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, f_{125} = f_{345} = -\frac{1}{2}$$
$$f_{316} = -f_{246} = f_{237} = -f_{147} = f_{128} = -f_{348} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Damit ist zusätzlich $\alpha_1^{'} = \alpha_7^{'} = \alpha_5^{''} = 0$ und nur $\alpha^{'} = \frac{1}{2}, \alpha_2^{'} = \alpha_5^{'} = \frac{1}{4}, \alpha^{''} = \alpha_1^{''} = 1$ verschwinden nicht. Damit lauten die Gleichungen zweiter Ordnung nach einer Reskalierung $\tilde{\Psi}(t) = 2\Psi(t)$, $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)$:

$$\ddot{\Phi} = \frac{1}{4}\kappa\Phi - \frac{\kappa+3}{2}\Phi\Psi + \frac{1}{2}\Phi^3 + \Phi\Psi^2 = -\frac{\partial V}{\partial \Phi} \tag{8.63}$$
$$\ddot{\Psi} = \frac{\kappa+1}{2}\Psi - \frac{1}{4}(\kappa+3)\Phi^2 + \Psi\Phi^2 = -\frac{\partial V}{\partial \Psi}, \tag{8.64}$$

mit einem Potential V,

$$-V = \frac{\kappa+1}{4}\Psi^2 + \frac{1}{8}\kappa\Phi^2 + \frac{1}{8}\Phi^4 - \frac{1}{4}(\kappa+3)\Phi^2\Psi + \frac{1}{2}\Psi^2\Phi^2. \tag{8.65}$$

Physikalische Lösungen verbinden kritische Punkte (Φ_i, Ψ_i) und (Φ_j, Ψ_j) von V mit

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi_i} = \frac{\partial V}{\partial \Psi_i} = 0 \wedge V(\Phi_i, \Psi_i, \kappa) = V(\Phi_j, \Psi_j, \kappa). \tag{8.66}$$

Bestimmung der kritischen Punkte. Insgesamt existieren drei kritische Punkte **unabhängig von** κ: Sei $\Phi = 0$. Dies impliziert sofort $\Psi = 0$. Es ist also $(\mathbf{\Phi_1}, \mathbf{\Psi_1}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ **für alle** κ kritischer Punkt. Sei nun $\Phi \neq 0$. Aus (8.63) folgt dann

$$\Phi^2 = -\frac{1}{2}\kappa + (\kappa+3)\Psi - 2\Psi^2. \tag{8.67}$$

Dies in 8.64 eingesetzt liefert

$$0 = -2\Psi^3 + \frac{3}{2}(\kappa+3)\Psi^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\kappa+3)^2\right)\Psi + \frac{1}{8}\kappa(\kappa+3) \tag{8.68}$$

κ	#
$< -9-4\sqrt{2}$	7
$(-9-4\sqrt{2}, -9+4\sqrt{2})$	3
$(-9+4\sqrt{2}, -1)$	7
$(-1, 0)$	3
> 0	5

Tabelle 8.1: Anzahl der kritischen Punkte für $S^5 = SU(2)/SU(1)$ in Abhängigkeit von κ.

mit der Lösung $\Psi = 1/2$ für alle κ. Daraus folgt mit (8.67), dass $(\Phi_{2,3}, \Psi_{2,3}) = (\pm 1, 1/2)$ **Lösung für alle** κ.

Alle weiteren kritischen Punkte sind **abhängig von** κ: Nach Faktorisieren wird (8.68) zu

$$0 = \left(\Psi - \frac{1}{2}\right)\left(8\Psi^2 - 2(3\kappa+7)\Psi + \kappa(\kappa+3)\right) \tag{8.69}$$

mit den Lösungen

$$\Psi_\pm = \frac{7+3\kappa}{8} \pm \sqrt{(7+3\kappa)^2 - 8(3+\kappa)\kappa} \tag{8.70}$$

Da Φ, Ψ reellwertig sind, muss der Wurzelausdruck nichtnegativ sein. Aus dieser Bedingung ergeben sich die Werte für κ, welche mögliche kritische Punkte implizieren:

$$\kappa \leq -9 - 4\sqrt{2} \text{ oder } \kappa \geq -9 + 4\sqrt{2} \tag{8.71}$$

Einsetzen von $\Psi_\pm$ in (8.67) liefert die zusätzlichen Einschränkungen $\kappa \leq -1$ für Ψ_+ und für Ψ_- $\kappa \leq -1$ oder $\kappa \geq 0$. Die Anzahl der kritischen Punkte $\# = 3 + \#_\kappa$ variiert also intervallweise, wie Tabelle 8.1 zeigt.

Analytische Lösungen. Offensichtich existieren für $\kappa = -1$ und $\kappa = -3$ Lösungen, für die das Potential besondere Symmetrie aufweist. Es ist

$$\ddot{\Phi} = \frac{1}{2}\left(\Phi^3 - \Phi\right) \qquad \text{mit } \tilde{\Phi}(t) = \tanh\left(\frac{1}{2}t\right) \qquad \text{für } \kappa = -1, \tilde{\Psi} = 1,$$

$$\ddot{\Phi} = \frac{1}{2}\left(\Phi^3 - \frac{3}{2}\Phi\right) \qquad \text{mit } \tilde{\Phi}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}t\right) \qquad \text{für } \kappa = -3, \tilde{\Psi} = 0.$$

Desweiteren existieren für $\Phi = 0$, $\Psi \neq 0$ nicht-konstante Lösungen für Ψ in Abhängigkeit von κ:

$$\Psi(t) \approx \exp\left(\sqrt{\frac{\kappa+1}{2}}t\right) \qquad \text{für } \kappa > -1 \tag{8.72}$$

$$\Psi(t) \approx t \qquad \text{für } \kappa = -1 \tag{8.73}$$

$$\Psi(t) \approx \exp\left(i\sqrt{\left|\frac{\kappa+1}{2}\right|}t\right) \qquad \text{für } \kappa < -1 \tag{8.74}$$

Diese stellen jedoch keine Verbindung zwischen kritischen Punkten dar. Sie sind keine Lösungen endlicher Wirkung und damit physikalisch nicht relevant.

8.5.2 Beispiel: $S^{2n+1} = SU(n+1)/SU(n)$

Um die Yang-Mills-Gleichungen (8.41) und (8.42) auf beliebige Sphären ungerader Dimension zu verallgemeinern, muss die Aufspaltung des Indexbereiches für $\{a\} = \{a^{'}\} \cup \{a^{''}\}$ entsprechend angepasst werden. Man findet zum Beispiel

$$\{a^{'}\} = \{1, ..., 6\}, \{a^{''}\} = \{7\}, \{i\} = \{8, ..., 15\} \text{ für n=3}$$
$$\{a^{'}\} = \{1, ..., 8\}, \{a^{''}\} = \{9\}, \{i\} = \{10, ..., 24\} \text{ für n=4}$$

auf Grundlage einer generalisierten antihermiteschen Basis für $\mathfrak{su}(n)$, gegeben durch die verallgemeinerten Gell-Mann-Matrizen:

Sei im Folgenden $j, k \in \{1, ...n\}$ und E_{jk} die Matrix, deren Eintrag an der Position jk 1 und sonst 0 ist. Dann konstruiert sich aus den E_{jk} die Basis für $\mathfrak{su}(n)$ zu

$$\mathfrak{su}(n) = Span\{I^n_{kj}, h^n_k\} \tag{8.75}$$

für $1 < k, j \leq n$. Hierbei sind I^n_{kj}, $k \neq j$, n-dimensionale Matrizen mit verschwindender Diagonale,

$$I^n_{kj} \propto \begin{cases} -i(E_{kj} + E_{jk}) & \text{für } k < j, \\ E_{jk} - E_{kj} & \text{für } k > j, \end{cases} \tag{8.76}$$

und

$$h^n_k \propto \begin{cases} 0 \oplus h^{n-1}_k & \text{für } 1 < k < n \\ i\left((1-n) \oplus \mathrm{Id}^{n-1}\right) & \text{für } k = n, \end{cases} \tag{8.77}$$

wobei $\oplus$ die direkte Summe von Matrizen bezeichnen soll. Für eine genaue Bestimmung der Basis wäre noch die Angabe der Normierungsfaktoren vor den Generatoren notwendig. Diese werden jedoch hier nicht benötigt, da es im Folgenden nur um die Frage gehen soll, ob die Strukturkonstanten verschwinden oder nicht; Kenntnis über die Bauart der Generatoren ist hierfür ausreichend. Beachte jedoch, dass in die konkrete Berechnung der α die Normierungsbedingung (8.4) mit eingeht, siehe unten.

Für die Angabe einer Basis von $\mathfrak{su}(n+1)$ sei im Folgenden zum Zwecke der Vereinfachung die Basis von $\mathfrak{su}(n)$ mit $\tilde{I}_i$, $i \in \{2n+2, ..., n^2+2n\}$, bezeichnet. Ferner sei $a^{'} \in \{2, ..., 2n+1\}$, $a^{''} = 1$. Dann ist mit $\{I_{a'}, I_{a''}, I_i := 0 \oplus \tilde{I}_i\}$ eine Basis für $\mathfrak{su}(n+1)$ gegeben, wobei

$$I_{a''} := h^n_k \qquad \text{mit } k = n, \tag{8.78}$$
$$I_{a'} := I^n_{kj} \qquad \text{wobei } 1 \leq k, j \leq n \text{ mit } k = n \vee j = n. \tag{8.79}$$

Aus der Form der Basismatrizen ergibt sich sofort, dass

$$[I_i, I_j] \neq 0 \ \Rightarrow f^k_{ij} \neq 0. \tag{8.80}$$

Für die restlichen Kommutatorrelationen folgt

$$[I_{a'}, I_{b'}] \propto \begin{cases} I_1 & \text{für Einträge auf gleichen Positonen } \Rightarrow f_{a'b'1} \neq 0 \\ I_j & \text{für Einträge auf ungleichen Positonen } \Rightarrow f_{a'b'j} \neq 0 \end{cases} \tag{8.81}$$

κ	#
$\leq -1-4n-4\sqrt{n^2-n}$	7
$(-1-4n-4\sqrt{n^2-n}, -1-4n+4\sqrt{n^2-n})$	3
$(-1-4n+4\sqrt{n^2-n}, -1)$	7
$(-1, n-2)$	3
$\geq n-2$	5

Tabelle 8.2: Anzahl der kritischen Punkte für $S^{2n+1} = SU(n+1)/SU(n)$ in Abhängigkeit von κ.

und $f_{i1a'} = 0$, $f_{a'b'c'} = 0$. Laut (8.39) verschwinden also nur $\alpha_2', \alpha_5', \alpha_1''$ nicht. Es ist

$$\alpha_2'\delta_{b'e'}\delta^{b'e'} = 2n\alpha_2' = f_{b'c'1}f_{e'c'1}\delta^{b'e'} = f_{b'e'1}f_{b'e'1} = \alpha_1''. \tag{8.82}$$

Mit (8.4),

$$g_{b'e'} = f_{b'd'1}f_{1e'd'} + f_{b'1c'}f_{c'e'1} + f_{b'ic'}f_{c'e'i} + f_{b'c'i}f_{ie'c'} = \delta_{b'e'}, \tag{8.83}$$

ist

$$\delta_{b'e'} = 2\left(f_{b'c'1}f_{e'c'1} + f_{b'c'i}f_{e'c'i}\right) = 2\left(\alpha_2' + \alpha_5'\right)\delta_{b'e'}. \tag{8.84}$$

Zusammen mit $g_{11} = f_{1c'd'}f_{1c'd'} = \alpha_1''$ folgt insgesamt für allgemeine Sphären ungerader Dimension

$$\begin{aligned} &\alpha_1' = \alpha_3' = \alpha_7' = 0, \alpha_2' = \frac{1}{2n}, \alpha_5' = \frac{n-1}{2n}, \alpha_1'' = 1, \alpha_2'' = \alpha_3'' = \alpha_5'' = 0, \alpha_7'' = 0, \\ &\alpha' = \frac{1}{n}, \alpha'' = 1. \end{aligned} \tag{8.85}$$

Für die Ermittlung von Yang-Mills-Lösungen auf S^{2n+1} setzt man die Werte (8.85) in (8.41) und (8.42) ein und erhält so nach Reskalierung $\tilde{\Psi}(t) = \sqrt{2n}\Psi(t), \tilde{\Phi}(t) = \Phi(t)$

$$\ddot{\Phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa+2}{n} - 1\right)\Phi - \frac{\kappa+3}{\sqrt{2n}}\Phi\Psi + \frac{1}{2}\Phi^3 + \Phi\Psi^2, \tag{8.86}$$

$$\ddot{\Psi} = \frac{1}{2}(\kappa+1)\Psi - \frac{\kappa+3}{2\sqrt{2n}}\Phi^2 + \Psi\Phi^2, \tag{8.87}$$

mit dem Potential

$$-V = \frac{1}{4}\left(\frac{\kappa+2}{n} - 1\right)\Phi - \frac{\kappa+3}{2\sqrt{2n}}\Phi^2\Psi + \frac{1}{8}\Phi^4 + \frac{1}{2}\Phi^2\Psi^2 + \frac{1}{4}(\kappa+1)\Psi^2. \tag{8.88}$$

Für verschiedene Werte von κ treten kritische Punkte (und damit potentielle Lösungen) in spezifischer Anzahl auf, siehe Tabelle 8.2.

Analytische Lösungen. Analog dem Vorgehen für S^5 erhält man die Gleichungen

$$\ddot{\Phi} = \frac{1}{2}\left(\Phi^3 - \Phi\right) \qquad \text{für } \kappa = -1, \Psi = 1 \tag{8.89}$$

$$\ddot{\Phi} = \frac{1}{2}\left(\Phi^3 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\Phi\right) \qquad \text{für } \kappa = -3, \Psi = 0 \tag{8.90}$$

mit Lösungen

$$\left(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \kappa\right) = \left(\tanh\left(\frac{1}{2}t\right), 1, -1\right), \tag{8.91}$$

$$\left(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \kappa\right) = \left(\sqrt{\frac{1+n}{n}} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+n}{n}}t\right), 0, -3\right). \tag{8.92}$$

Insbesondere führt dies für den konkreten Fall $n = 3\,(S^7)$ auf Lösungen

$$\left(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \kappa\right) = \left(\tanh\left(\frac{1}{2}t\right), 1, -1\right), \tag{8.93}$$

$$\left(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \kappa\right) = \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}t, -3\right), 0, -3\right). \tag{8.94}$$

8.5.3 Beispiel: $S^7 \cong Sp(2)/Sp(1)$.

Ein alternativer Ansatz für die Bestimmung von Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen für S^7 besteht in der Betrachtung des Cosetraums $Sp(2)/Sp(1)$, welcher isomorph zu S^7 ist. Es finden sich mit diesem Ansatz möglicherweise weitere Lösungen für diesen Fall:

Wähle dazu folgende antihermitesche Basis für $\mathfrak{sp}(2)$, vgl. [25]:

$$
I_1 = \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
I_2 = \frac{-i}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
I_3 = \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$
$$
I_4 = \frac{i}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
I_5 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
I_6 = \frac{-i}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$
$$
I_7 = \frac{i}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
I_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
I_9 = \frac{-i}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$
$$
I_{10} = \frac{i}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.95}
$$

Hierbei sind die Generatoren so ausgezeichnet, dass $\mathfrak{sp}(1) = LH\{I_i\}$ mit $i = \{8, 9, 10\}$ und $a'' = \{5, 6, 7\}$, also $a' = \{1, 2, 3, 4\}$.
Analog dem Vorgehen bei obigen Beispielen findet man

$$
\begin{aligned}
\alpha_1' = 0, \alpha_2' = \frac{1}{4}, \alpha_3' = 0, \alpha_5' = \frac{1}{4}, \alpha_7' = 0, \alpha' = \frac{1}{2}, \\
\alpha_1'' = \frac{1}{3}, \alpha_2'' = 0, \alpha_3'' = \frac{2}{3}, \alpha_5'' = 0, \alpha_7'' = 0, \alpha'' = 1.
\end{aligned} \tag{8.96}
$$

Damit lauten die Yang-Mills-Gleichung nach Reskalierung $\tilde{\Phi}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}t\right), \tilde{\Psi}(t) = \Psi\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}t\right)$

$$
\ddot{\Phi} = 3\kappa\Phi - 3(\kappa+3)\Phi\Psi + \frac{9}{2}\Phi^3 + 3\Phi\Psi^2, \tag{8.97}
$$
$$
\ddot{\Psi} = 6(\kappa+1)\Psi - 4(\kappa+3)\Psi^2 - \frac{3}{2}(\kappa+3)\Phi^2 + 8\Psi^3 + 3\Psi\Phi^2, \tag{8.98}
$$

mit dem Potential

$$
-V = \frac{3}{2}\kappa\Phi^2 + \frac{9}{8}\Phi^4 + 3(\kappa+1)\Psi^2 - \frac{4}{3}(\kappa+3)\Psi^3 + 2\Psi^4 - \frac{3}{2}(\kappa+3)\Phi^2\Psi + \frac{3}{2}\Phi^2\Psi^2. \tag{8.99}
$$

Kritische Punkte. Es ist sofort ersichtlich, dass $(\Phi_1, \Psi_1) = (0, 0)$ für alle κ kritischer Punkt ist. Es folgt jedoch nicht automatisch aus $\Phi = 0$, dass $\Psi = 0$:
Sei $\Phi = 0$. Dann ist

$$0 = 6(\kappa + 1)\Psi - 4(\kappa + 3)\Psi^2 + 8\Psi^3 \tag{8.100}$$

mit Lösungen

$$\Psi = 0 \ \vee \ \Psi^2 - 2(\kappa + 3)\Psi + 3(\kappa + 1) = 0. \tag{8.101}$$

Dies liefert zwei weitere kritische Punkte bei

$$(\Phi, \Psi_\pm) = \left(0, \pm\frac{1}{2}\sqrt{-3(\kappa + 1) + \frac{1}{4}(\kappa + 3)^2} + \frac{1}{4}(\kappa + 3)\right). \tag{8.102}$$

Für $\Phi \neq 0$ erhält man aus 8.97 und 8.98

$$\Phi^2 = -\frac{2}{3}\kappa + 2(\frac{\kappa}{3} + 1)\Psi - \frac{2}{3}\Psi^2, \tag{8.103}$$

$$0 = 6\left(\kappa + 1\right)\Psi - 4\left(\kappa + 3\right)\Psi^2 - \frac{3}{2}\left(\kappa + 3\right)\Phi^2 + 8\Psi^3 + 3\Psi\Phi^2. \tag{8.104}$$

Setzt man 8.103 in 8.104 ein, so ergibt sich

$$6\Psi^3 - (\kappa + 3)\Psi^2 - (\kappa^2 + 2\kappa + 3)\Psi + \kappa(\kappa + 3) = 0 \tag{8.105}$$

mit Lösungen

$$\Psi_1 = 1, \ \Psi_{2/3} = \frac{1}{12}\left(\kappa - 3 \pm w\right) \tag{8.106}$$

mit $w := \sqrt{25\kappa^2 + 66\kappa + 9}$.

Analytische Lösungen. Tabelle 8.6 zeigt analytische Lösungen $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi})$ in Abhängigkeit von κ:
Für $\kappa = -1$ erhält man für $\tilde{\Psi} = 1$ die Lösung $\tilde{\Phi}(t) = \pm\tanh(\frac{1}{2}t)$.
Für $\kappa = -3$ sind wegen (8.102) Ψ_+ und Ψ_- äquidistant zum Ursprung. Man hat

$$\ddot{\Phi} = 9\Phi\left(\frac{1}{2}\Phi^2 - 1\right) \wedge \Psi = 0, \tag{8.107}$$

$$\ddot{\Psi} = 4\Psi\left(2\Psi^2 - 3\right) \wedge \Phi = 0 \tag{8.108}$$

mit Lösungen $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \kappa)$

$$\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\tanh\left(\frac{3}{2\sqrt{6}}t\right), 0, -3\right) \ \text{und} \ \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right), -3\right), \tag{8.109}$$

welche zwischen $(0, \Psi_+)$ und $(0, \Psi_-)$ hin- und herpendeln.

Die Bedingung für Lösungen zwischen dem Ursprung und $(0, \Psi_+)$,

$$V(0, \Psi_+, \kappa) = V(0, 0, \kappa), \tag{8.110}$$

$\tilde{\Phi}(t)$	$\tilde{\Psi}(t)$	κ
$\pm\tanh(\frac{1}{2}t)$	1	-1
$\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\tanh\left(\frac{3}{2\sqrt{6}}t\right)$	0	-3
0	$\frac{3}{2\sqrt{2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$	
0	$-\frac{6}{9-\sqrt{33}}\left(\tanh\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{57+9\sqrt{33}}{6}}t\right)-1\right)$	$\frac{3}{4}\left(5+\sqrt{33}\right)$
0	$-\frac{6}{9+\sqrt{33}}\left(\tanh\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{57-9\sqrt{33}}{6}}t\right)-1\right)$	$\frac{3}{4}\left(5-\sqrt{33}\right)$

Tabelle 8.3: Analytische Lösungen für $S^7 \cong Sp(2)/Sp(1)$.

liefert

$$\kappa_\pm = \frac{3}{4}\left(5 \pm \sqrt{33}\right), \tag{8.111}$$

Setzt man dies in (8.98) ein, so ergibt sich eine Lösung der Form

$$\Psi(t) = \mu^{-1}\left(\tanh\left(\frac{\lambda t}{\sqrt{2}}\right) - 1\right), \tag{8.112}$$

wobei

$$\lambda = \frac{\sqrt{57 - 9\sqrt{33}}}{2},\ \mu = \frac{1}{6}(-9 - \sqrt{33}). \tag{8.113}$$

Es ist nämlich (8.112) nach zweimaligem Differenzieren vom Typ wie (8.98) für $\Phi = 0$,

$$\ddot{\Psi} = \lambda^2\Psi\left(\mu^2\Psi^2 + 3\mu\Psi + 2\right), \tag{8.114}$$

und durch Koeffizientenvergleich ergeben sich λ und μ. Dies führt zu den Lösungen $(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}, \kappa)$

$$\left(0, -\frac{6}{9 \mp \sqrt{33}}\left(\tanh\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{57 \pm 9\sqrt{33}}{6}}t\right) - 1\right), \kappa_\pm\right). \tag{8.115}$$

Eine analytische Lösung zwischen dem Ursprung und $(0, \Psi_-)$ existiert nicht, da $V(0, \Psi_-, \kappa) = V(0, 0, \kappa)$ keine Lösung für κ liefert.

8.5.4 Beispiel: $S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n)$

Im Folgenden soll der Fall S^7 auf Sphären der Dimension $4n+3$ verallgemeinert werden: Eine antihermitesche Basis von $\mathfrak{sp}(n)$, $\dim \mathfrak{sp}(n) = 2n^2 + n$, ist durch die Generatoren (wie in 8.5.2 wieder ohne Berücksichtigung der Normierungsfaktoren)

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & A & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & ... & & & & \\ B & 0 & & & & \\ 0 & & & & & \\ . & . & . & . & . & \\ 0 & .... & & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathfrak{sp}(n-1), \mathfrak{sp}(1) \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus ... \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(n-1)\text{mal}} \tag{8.116}$$

gegeben, wobei A an der Stelle s mit $s = 2, ..., n$. B findet sich auf der an der Diagonalen gespiegelten Position von A. Es ist

$$A \in \left\{ i \cdot \mathfrak{sp}(1), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \ B \in \{A, -A\}, \tag{8.117}$$

wobei B so zu wählen ist, dass die gesamte Matrix antihermitesch wird, und

$$\mathfrak{sp}(1) = LH \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \tag{8.118}$$

Es bezeichnen nun die $a^{'}$ Matrizen mit den A, B; die i, j, k beziehen sich auf den Typ $0 \oplus \mathfrak{sp}(n-1)$ und die $a^{''}$ auf $\mathfrak{sp}(1) \oplus (n-1) \cdot 0$. Man findet also

$$\begin{aligned} a' &\in \{1, ..., 4n\}, \\ i, j, k &\in \{4n+1, ..., 5n+2n^2\}, \\ a^{''} &\in \{5n+2n^2+1, ..., 5n+2n^2+3\}. \end{aligned} \tag{8.119}$$

Eine solche Basis liefert nun Strukturkonstanten der Form

$$\begin{aligned} f_{ijk} &\neq 0, \\ f_{a'b'c''} &\neq 0, \\ f_{a'b'i} &\neq 0, \\ f_{a''b''c''} &\neq 0, \\ f_{ia''b'} = f_{ia''b''} = f_{a''b''c'} = f_{a''b''i} &= 0, \end{aligned} \tag{8.120}$$

weshalb im Folgenden also nur $\alpha'_2, \alpha'_5, \alpha''_1$ und α''_3 zu bestimmen sind. Zu diesem Zweck liefert die Auswertung von (8.37) und (8.38) mit (8.39) die im Weiteren nützlichen Relationen

$$\alpha' = \alpha'_1 + 2\alpha'_2 + \alpha'_3 \text{ bzw. } \alpha'' = \alpha''_1 + 2\alpha''_2 + \alpha''_3, \tag{8.121}$$

$$\frac{1}{2}(1-\alpha') = \alpha'_5 + \alpha'_7 \text{ bzw. } \frac{1}{2}(1-\alpha'') = \alpha''_5 + \alpha''_7. \tag{8.122}$$

Bestimmung von α_1'' und α_3''. Es ist $\alpha_1''\delta_{a''b''} = f_{a''c'd'}f_{b''c'd'}$ mit $f_{a''c'd'}I_{d'} = [I_{a''}, I_{c'}]$. Wählt man eine Basis für die $I_{a''}$ und $I_{a'}$ wie oben unter Einführung eines zusätzlichen Normierungsfaktors d bzw. e mit $d, e \in \mathbb{R}$, so ist ersichtlich, dass $f_{a''c'd'} = d \ \forall a'', c'$. Damit gilt

$$\alpha_1'' = f_{a''c'd'}f_{a''c'd'} = 4nd^2 \Leftrightarrow d = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_1''}{n}} \tag{8.123}$$

Wegen der Normierungsbedingung (8.4) gilt $\alpha''\delta_{a''b''} = f_{a''cd}f_{b''cd} = g_{a''b''} = 1$. Dann ist (8.131) mit $\alpha_2'' = 0$

$$1 = \alpha_1'' + \alpha_3''. \tag{8.124}$$

Weiter gilt $\alpha_3''\delta_{a''b''} = f_{a''c''d''}f_{b''c''d''}$. Aufgrund obiger Basiswahl stammen hierbei die Strukturkonstanten aus einer Gleichung vom Typ

$$[i \cdot d \cdot \sigma_{a''}, i \cdot d \cdot \sigma_{c''}] = i \cdot f_{a''c''d''} \cdot d \cdot \sigma_{d''},$$

wobei die σ die Paulimatrizen bezeichnen. Es ist also wegen $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \cdot \epsilon_{ijk}\sigma_k$ und $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk} = 2\delta_{il}$

$$f_{a''c''d''} = -2d\epsilon_{a''c''d''}. \tag{8.125}$$

Damit ergibt sich

$$\alpha_3'' = f_{a''c''d''}f_{a''c''d''} = 8d^2. \tag{8.126}$$

Also folgt aus (8.124) mit (8.123)

$$\alpha_1'' = \frac{n}{n+2}, \tag{8.127}$$

$$\alpha_3'' = \frac{2}{n+2}. \tag{8.128}$$

Bestimmung von α_2'. Mit $\alpha_2'\delta_{b'e'} = f_{b'c'a''}f_{e'c'a''}$ ist

$$\begin{aligned} 4n\alpha_2' &= f_{e'c'a''}f_{e'c'a''} = 3\alpha_1'' \\ \Leftrightarrow \alpha_2' &= \frac{3}{4n}\alpha_1'' = \frac{3}{4(n+2)}. \end{aligned} \tag{8.129}$$

Bestimmung von α_5'. Einsetzen von (8.121), wobei $\alpha_1' = \alpha_3' = 0$, in (8.122) liefert

$$\alpha_5' = \frac{2n+1}{4(n+2)}. \tag{8.130}$$

Insgesamt ergibt sich folglich für Sphären S^{4n+3}:

$$\begin{aligned} &\alpha_1^{'} = \alpha_3^{'} = \alpha_7^{'} = 0, \alpha_2^{'} = \frac{3}{4(n+2)}, \alpha_5^{'} = \frac{2n+1}{4(n+2)}, \\ &\alpha_2^{''} = \alpha_5^{''} = \alpha_7^{''} = 0, \alpha_1^{''} = \frac{n}{n+2}, \alpha_3^{''} = \frac{2}{n+2}, \\ &\alpha^{'} = \frac{3}{2(n+2)}, \alpha^{''} = 1. \end{aligned} \tag{8.131}$$

Die Yang-Mills Gleichungen (8.41) und (8.42) lauten damit nach einer Reskalierung $\tilde{\Phi}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{n}}\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{(n+2)}}t\right)$, $\tilde{\Psi}(t) = \Psi\left(\frac{1}{2\sqrt{(n+2)}}t\right)$

$$\ddot{\Phi} = (3\kappa + 2 - 2n)\Phi - 3(\kappa + 3)\Phi\Psi + \frac{3(n+2)}{2n}\Phi^3 + 3\Phi\Psi^2 \tag{8.132}$$

$$\ddot{\Psi} = 2(n+2)(\kappa+1)\Psi - 4(\kappa+3)\Psi^2 - \frac{3}{2}(\kappa+3)\Phi^2 + 8\Psi^3 + 3\Psi\Phi^2 \tag{8.133}$$

mit einem Potential

$$\begin{aligned} -V = &\left(\frac{3}{2}\kappa + 1 - n\right)\Phi^2 + \frac{3(n+2)}{8n}\Phi^4 + (n+2)(\kappa+1)\Psi^2 \\ &- \frac{4}{3}(\kappa+3)\Psi^3 + 2\Psi^4 - \frac{3}{2}(\kappa+3)\Phi^2\Psi + \frac{3}{2}\Psi^2\Phi^2 \end{aligned} \tag{8.134}$$

Kritische Punkte. Sei $\Phi = 0$. Analog der Betrachtungen in 8.5.3 ergeben sich neben $(0,0)$ kritische Punkte bei $(0, \Psi_\pm)$ mit

$$\Psi_\pm = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}(\kappa+3)^2 - (n+2)(\kappa+1)} + \frac{1}{4}(\kappa+3). \tag{8.135}$$

Für $\Phi \neq 0$ ist (8.132)

$$\Phi^2 = \frac{-2n(3\kappa + 2 - 2n)}{3(n+2)} + \frac{2n(\kappa+3)}{n+2}\Psi - \frac{2n}{n+2}\Psi^2. \tag{8.136}$$

Dies eingesetzt in (8.133) für konstantes Ψ liefert

$$\begin{aligned} 0 = &\Psi^3(2n+16) + \Psi^2(\kappa+3)(5n-8) + 11n\kappa + 6n + 6n^2 + 3\kappa^2 n - 2n^2\kappa \\ &+ \Psi(2n^2\kappa - 16n\kappa - 3n\kappa^2 + 8\kappa + 6n^2 - 23n + 8) \end{aligned} \tag{8.137}$$

mit den Lösungen

$$\Psi_{n,1} = 1,\ \Psi_{n,2/3} = \frac{1}{2(16+2n)}\left(8 + 18\kappa - 17n - 5\kappa n \pm w_n\right), \tag{8.138}$$

wobei

$$w_n := \sqrt{(-8 - 8\kappa + 17n + 5\kappa n)^2 - 4(16+2n)(-6n - 11\kappa n - 3\kappa^2 n + 6n^2 + 2\kappa n^2)}. \tag{8.139}$$

Analytische Lösungen. Tabelle 8.4 zeigt analytische Lösungen in Abhängigkeit von κ:
Für $\kappa = -1$ erhält man für $\tilde{\Psi} = 1$ die Lösung $\tilde{\Phi}(t) = \pm\tanh(\frac{1}{2}t)$.
Für $\kappa = -3$ folgen aus

$$\Phi = 0 \wedge \ddot{\Psi} = -4(n+2)\Psi + 8\Psi^3, \tag{8.140}$$

$$\Psi = 0 \wedge \ddot{\Phi} = (-7 - 2n)\Phi + \frac{3(n+2)}{2n}\Phi^3 \tag{8.141}$$

$\tilde{\Phi}(t)$	$\tilde{\Psi}(t)$	κ
$\pm\tanh(\frac{1}{2}t)$	1	-1
$\pm\sqrt{\frac{7+2n}{2(n+2)}}\tanh\left(\sqrt{\frac{7+2n}{8(n+2)}}t\right)$	0	-3
0	$\pm\sqrt{\frac{n+2}{2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$	
0	$\frac{2(2+n)}{-6-3n\pm u}\left(\tanh\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{20+28n+9n^2\pm 6u\pm 3nu}\ t}{2\sqrt{2(n+2)}}\right)-1\right)$	$\kappa_{n,\pm}$

Tabelle 8.4: Analytische Lösungen für $S^{4n+3} \cong Sp(n+1)/Sp(n)$ mit $u := \sqrt{(2+n)(2+9n)}$.

die Lösungen $(\tilde{\Phi}(t), \tilde{\Psi}(t), \kappa)$

$$\left(0, \pm\sqrt{\frac{n+2}{2}}\tanh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right), -3\right) \tag{8.142}$$

$$\text{und} \quad \left(\pm\sqrt{\frac{7+2n}{2(n+2)}}\tanh\left(\sqrt{\frac{7+2n}{8(n+2)}}t\right), 0, -3\right). \tag{8.143}$$

Mit der gleichen Argumentation wie in 8.5.3 findet man für

$$\kappa_{n,\pm} = \frac{3}{4}\sqrt{2+3n\pm\sqrt{4+20n+9n^2}} \tag{8.144}$$

Lösungen zwischen $(0,0$ und $(0,\Psi_+)$,

$$\Psi(t) = \mu_n^{-1}\left(\tanh\left(\frac{\lambda_n t}{\sqrt{2}}\right)-1\right) \tag{8.145}$$

mit

$$\lambda_n = \frac{1}{2}\sqrt{20+28n+9n^2\pm 6u\pm 3nu},\ \mu_n = \frac{-6-3n\pm u}{2(2+n)}, \tag{8.146}$$

wobei $u := \sqrt{(2+n)(2+9n)}$.

Cosetraum	$(\tilde{\Phi}(t), \tilde{\Psi}(t), \kappa)$
$S^5 \cong SU(3)/SU(2)$	$(\pm\sqrt{2}\ \text{sech}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}t\right), 1, -1)$ $(\pm\sqrt{3}\ \text{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}t\right), 0, -3)$
$S^{2n+1} \cong SU(n+1)/SU(n)$	$(\pm\sqrt{2}\ \text{sech}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}t\right), 1, -1)$ $(\pm\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\ \text{sech}\left(\sqrt{\frac{n+1}{2n}}t\right), 0, -3)$
$S^7 \cong Sp(2)/Sp(1)$	$(\pm\sqrt{2}\ \text{sech}(\frac{\sqrt{2}}{2}t), 1, -1)$ $(\pm\sqrt{3}\ \text{sech}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), 0, -3)$ $(0, \pm\sqrt{3}\ \text{sech}\left(t\right), -3)$
$S^{4n+3} \cong Sp(n+1)/Sp(n)$	$(\pm\sqrt{2}\ \text{sech}(\frac{\sqrt{4+2n}}{2\sqrt{n+2}}t), 1, -1)$ $(\pm\sqrt{\frac{2n+7}{n+2}}\ \text{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+2n}{n+2}}t\right), 0, -3)$ $(0, \pm\sqrt{n+2}\ \text{sech}(t), -3)$

Tabelle 8.5: Dyonische Lösungen.

8.6 Dyonische Lösungen

Nach Transformation der Koordinate e^0 in (8.8) zu

$$e^0 = dt \to idt = d\tau = \tilde{e}^0 \tag{8.147}$$

wird der Totalraum des G-Bündels wie in (8.2) zu $i\mathbb{R} \times G/H$ mit Lorentzmetrik g_D,

$$g_D = -(\tilde{e}^0)^2 + \delta_{ab} e^a \otimes e^b. \tag{8.148}$$

Für diesen Fall soll nun erneut nach Yang-Mills-Lösungen gesucht werden. Beachte, dass nicht-konstante Lösungen sich in 8.5.1-8.5.4 aus Gleichungen vom Typ

$$\ddot{\Phi} = \gamma(\alpha^2 \Phi^3 - \Phi), \gamma, \alpha \in \mathbb{R}, \gamma > 0, \alpha \neq 0 \tag{8.149}$$

ergeben [49] mit allgemeinem Kink

$$\Phi(t) = \frac{1}{\alpha} \tanh\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}t\right). \tag{8.150}$$

Unter Verwendung von (8.147) leiten sich die Yang-Mills-Gleichungen nun für alle genannten Beispiele analog her. Es ergeben sich die für die genannten Fälle bereits bekannten Gleichungen mit umgedrehtem Vorzeichen. Bringt man diese auf die Form

$$\ddot{\Phi} = \gamma\left(\frac{\Phi}{2} - \alpha^2\Phi^3\right) \tag{8.151}$$

mit geeigneten γ, α, so sind Lösungen vom allgemeinen Typ

$$\Phi(t) = \frac{1}{\alpha}\text{sech}\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}}t\right). \tag{8.152}$$

Es handelt sich hierbei um sogenannte Dyonen. Tabelle 8.5 zeigt dyonische Lösungen, welche sich nach oben genannter Modifikation der Metrik für die bereits behandelten Fälle der vorherigen Kapitel ergeben.

Cosetraum	$(\tilde{\Phi}(t), \tilde{\Psi}(t), \kappa)$
$S^5 \cong SU(3)/SU(2)$	$\left(\sqrt{2}b(k)k\ sn_k\left(\sqrt{\frac{1}{2}}b(k)t\right), 1, -1\right)$ $\left(\sqrt{3}b(k)k\ sn_k\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}b(k)t\right), 0, -3\right)$
$S^{2n+1} \cong SU(n+1)/SU(n)$	$\left(\sqrt{2}b(k)k\ sn_k\left(\sqrt{\frac{1}{2}}b(k)t\right), 1, -1\right)$ $\left(\sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}b(k)k\ sn_k\left(\sqrt{\frac{n+1}{2n}}b(k)t\right), 0, -3\right)$
$S^7 \cong Sp(2)/Sp(1)$	$\left(\sqrt{2}b(k)k\ sn_k\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b(k)t\right), 1, -1\right)$ $\left(\sqrt{3}b(k)k\ sn_k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right), 0, -3\right)$ $\left(0, \sqrt{3}b(k)k\ sn_k\left(b(k)t\right), -3\right)$
$S^{4n+3} \cong Sp(n+1)/Sp(n)$	$\left(\sqrt{2}b(k)k\ sn_k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}b(k)t\right), 1, -1\right)$ $\left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{2n+7}{2n+4}}b(k)k\ sn_k\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n+7}{2n+4}}\sqrt{2}b(k)t\right), 0, -3\right)$ $(0, \sqrt{n+2}b(k)k\ sn_k\left(b(k)t\right), -3)$

Tabelle 8.6: Periodische Lösungen, $b(k) = \sqrt{\frac{1}{1+k^2}}$.

8.7 Periodische Lösungen (Sphaleronen)

Kinklösungen auf $\mathbb{R} \times G/H$ der Form (8.150) ergeben sich aus der Gleichung

$$\ddot{\Phi} = 2\left(\Phi^3 - \Phi\right); \tag{8.153}$$

sie stellen nur eine Art möglicher Lösungen dar, vgl. [49]: Für $k \in (0,1)$ sind Lösungen von (8.153) von der Form

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{2}{1+k^2}}k\ \mathrm{sn}_k\left(\sqrt{\frac{2}{1+k^2}}t\right) \tag{8.154}$$

mit Jacobischen elliptischen Funktionen sn_k. Für $k = 1$ ist $\mathrm{sn}_k = \tanh$ (Kink). Ersetzt man nun $\mathbb{R}$ durch S^1 und gibt somit ein endliches Zeitintervall der Länge L vor, so ist jede Lösung der Gleichung (8.153) periodisch in t,

$$\Phi(t) = \Phi(t+L), \tag{8.155}$$

und von der Form (8.154), $k \in (0,1)$. Die Erfüllung der Periodizitätsbedingung (8.155) ist gewährleistet, falls

$$L = \frac{\sqrt{2(1+k^2)}K_k n}{2} \tag{8.156}$$

mit

$$K_k = K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}},\ n \in \mathbb{N}. \tag{8.157}$$

Tabelle 8.6 zeigt die Lösungen der vergangenen Abschnitte nach einem derartigen Übergang von unendlichem zu endlichem Zeitintervall. Beachte, dass Lösungen der Form

(8.154) nur für $L > 1/\sqrt{2}$ existieren und deren Anzahl mit größer werdendem L zunimmt. Für $n = 1$, $L > 1/\sqrt{2}$ und k aus (8.156) ist (8.154) nicht-konstante Lösung niedrigster Energie, das sogenannte Sphaleron. Es handelt sich hierbei um eine Kink- und eine Antikinklösung, welche im Abstand von πL angeordnet sind, also einander gegenüber liegend auf dem Kreis sitzen. Für größere Werte von L können die Lösungen anschaulich als Ketten von Kinks und Antikinks begriffen werden, welche sich im immer gleichen Abstand um den Kreis winden.

8.8 Von Instantonen zu Yang-Mills-Lösungen

Für spezielle Mannigfaltigkeiten M ergeben sich die unmittelbar aus (8.31) durch Einsetzen der Feldstärke F und des Zusammenhangs A hervorgegangenen Yang-Mills-Gleichungen (8.32) über dem Zylinder $\mathbb{R} \times M$ alternativ nach einmaligem Differenzieren der Instantongleichung: M muss hierbei eine Spin-Mannigfaltigkeit sein, die reelle Killing-Spinoren trägt. In [20] werden Instantonen auf Zylindern dieser Art untersucht, indem zunächst aus den grundlegenden Strukturen der betrachteten Mannigfaltigkeit der Instanton-Zusammenhang als (individuelle) Störung des kanonischen Zusammenhangs konstruiert wird. Dieser ist mit einer Familie von Metriken g_h kompatibel, parametrisiert durch einen Scharparameter $h \in \mathbb{R}$. Für eine bestimmte Wahl von h wird die Torsion des kanonischen Zusammenhangs antisymmetrisch.

Im Fall eines bezüglich der Schar g_h metrischen kanonischen Zusammenhangs mit antisymmmetrischer Torsion lassen sich die aus den Instantongleichungen hergeleiteten Yang-Mills Gleichungen auf Sasaki-Einstein-Mannigfaltigkeiten $SU(n+1)/SU(n)$ mit denen auf α-Sasaki-Mannigfaltigkeiten $SU(n+1)/SU(n)$ mit flacher Cartan-Killing-Metrik K vergleichen: Das folgende Kapitel zeigt, dass g_h und K durch Reskalierung auseinander hervorgehen; hierbei ist diese entsprechend der Aufspaltung der Menge von Cosetgeneratoren $a = \{a', a''\}$ für beide Indexuntermengen verschieden zu wählen. Es wird gezeigt, dass dies in den Yang-Mills-Gleichungen zur Änderung um einen gemeinsamen Faktor führt. Auf diesem Wege lässt sich folglich eine Bestätigung der Resultate (8.32) geben.

8.8.1 Instantonen und die Yang-Mills-Gleichung

Definition 8.8.1 (Reelle/Parallele Spinoren)**.** *Sei (M, g) eine Spin-Mannigfaltigkeit der Dimension n und E ein Vektorbündel über M mit Zusammenhang A und Krümmung $F \in \Gamma(\Lambda^2 T^* M \otimes End(E))$,*

$$F = dA + A \wedge A. \tag{8.158}$$

Sei ferner $\epsilon \in \Gamma(S)$ ein Spinor des zu E assoziierten Spinorbündels S mit

$$\nabla^{LC}_\mu \epsilon = i\lambda\gamma_\mu\epsilon \tag{8.159}$$

*wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und die Metrik falls nötig immer so reskaliert werden kann, dass $\lambda = 1/2$[20]. Dabei sind ∇^{LC} der Levi-Civita-Zusammenhang und γ_μ Generatoren der Clifford-Algebra, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. Für $\lambda = 0$ heißen ϵ **parallele Spinoren**, für $\lambda \neq 0$ **reelle Killing-Spinoren**.*

Es lässt sich zeigen, dass Killing-Spinoren auf M parallele Spinoren auf dem Kegel $(\mathbb{R} \times M, g_C) = (\mathbb{R} \times M, dt^2 + t^2 g)$ bedingen, vgl. Kapitel 6. Allein Sphären sowie Mannigfaltigkeiten M vom Typ G_2 mit $\dim(M) = 7$, nearly Kähler mit $\dim(M) = 6$, Sasaki-Einstein und 3-Sasaki tragen reelle Killing-Spinoren. Diese definieren jeweils eine G_2-, $SU(3)$-, $SU(n)$- bzw. $Sp(n)$-Struktur. Für eine ausführliche Darstellung siehe [18].

Instantonen lassen sich nun auf verschiedene Arten definieren. Grundlage für die Folgende sind Spin-Mannigfaltigkeiten, alternativ lassen sich Instantonen jedoch auch ausgehend von G-Strukturen auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten erklären. Siehe dazu [20].

Definition 8.8.2 (Instanton)**.** *Sei (E, π, M) ein Vektorbündel über einer Spin-Mannigfaltigkeit M mit assoziiertem Spinorbündel S, welches mindestens einen nichtverschwindenden Spinor ϵ bereitstelle. Ein Zusammenhang A auf E heißt dann* ***Instanton****, wenn für seine Feldstärke F gilt*

$$F \cdot \epsilon = 0. \tag{8.160}$$

Hierbei bezeichnet $\cdot$ die Clifford-Wirkung von F auf ϵ, $F \cdot \epsilon := \gamma(F)\epsilon$, und

$$\gamma\left(\frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\dots\mu_p} e^{\mu_1\dots\mu_p}\right) = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1\dots\mu_p}\gamma^{\mu_1\dots\mu_p}, \tag{8.161}$$

$$\gamma^{\mu_1\dots\mu_p} = \frac{1}{p}\sum_{\sigma\in S_p} sign(\sigma)\gamma^{\mu_{\sigma(1)}}\dots\gamma^{\mu_{\sigma(p)}}, \tag{8.162}$$

für allgemeine p-Formen ω. Beachte, dass (8.160) gerade der Gaugino-Gleichung (1.12) entspricht.

Es lässt sich nun folgender Zusammenhang zwischen Instantonen und der Yang-Mills-Gleichung herstellen [20]:

Theorem 8.8.3. *Sei M eine Spin-Mannigfaltigkeit mit Spinor ϵ, so dass (8.159) erfüllt ist, und A ein Instanton auf M. Dann löst A die Yang-Mills-Gleichung.*

Dies gilt sowohl für parallele als auch für reelle Killing-Spinoren. Im Folgenden werden Mannigfaltigkeiten betrachtet, die reelle Killing-Spinoren tragen:

8.8.2 Herleitung der modifizierten Yang-Mills-Gleichungen auf $\mathbb{R}\times M$ aus der Instantongleichung für α-Sasaki-Mannigfaltigkeiten $M = SU(n+1)/SU(n)$

Sei nun im Speziellen M eine $(2n+1)$ dimensionale Sasaki-Einstein-Mannigfaltigkeit der Form $M = G/H = SU(n+1)/SU(n)$ mit lokaler Orthonormalbasis $\{e^1, e^a\}$ für T^*M und Generatoren von $Lie(G/H)$ und $Lie(H)$ bezeichnet mit I_1, I_a bzw. I_i, $a \in \{2, ..., 2n+1\}$. Dann existieren auf M reelle Killing-Spinoren ϵ,$\tilde{\epsilon}$. Es sei im Folgenden ϵ so, dass (8.159) mit $\lambda = 1/2$ erfüllt ist, und $\langle\epsilon, \epsilon\rangle = 1$.

Es lassen sich nun mit Q', P', ω und η die kanonische 4-, 3-, 2- bzw. 1-Form derart definieren, dass [20]

$$\omega = -\frac{i}{2}\langle\epsilon, \gamma_{\mu\nu}\epsilon\rangle e^\mu \wedge e^\nu,\ \eta = \langle\epsilon, \gamma_\mu\epsilon\rangle e^\mu, \tag{8.163}$$

und

$$P' = -\frac{i}{3!}\langle\epsilon, \gamma_{\mu\nu\rho}\rangle\epsilon^{\mu\nu\rho},\ dP' = 4Q', \tag{8.164}$$

$$Q' = -\frac{1}{4!}\langle\epsilon, \gamma_{\mu\nu\kappa\lambda}\rangle\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda},\ d*Q' = (n-3)*P'. \tag{8.165}$$

Da M Sasaki-Einstein ist, ist die Casimir 4-Form Q auf M gleich der kanonischen 4-Form Q' (vgl. Abschnitt 6.1),

$$\begin{aligned} Q' = Q &= \frac{1}{2}\omega \wedge \omega, \ 4Q = dP, \\ P = P' &= \eta \wedge \omega. \end{aligned} \tag{8.166}$$

Ferner gilt

$$d * Q = (2n-2) * P, \ d\eta = 2\omega, \ d * \omega = 2n * \eta. \tag{8.167}$$

Mit $\{e^1, e^a\}$ kann nun eine Basis so gewählt werden, dass

$$\eta = e^1, \ \omega = e^2 \wedge e^3 + ... + e^{2n} \wedge e^{2n+1}. \tag{8.168}$$

Betrachte nun den Zylinder $(\mathbb{R} \times M, g_Z)$, $g_Z = e^0 \otimes e^0 + g_h$, mit noch zu spezifizierender Metrikschar g_h und $e^0 := dt$ mit $t, h \in \mathbb{R}$. Um auf dem Zylinder Instantonen zu konstruieren, ist zunächst die Einführung des folgenden Objektes notwendig:

Definition 8.8.4 (Kanonischer Zusammenhang)**.** *Sei M eine Mannigfaltigkeit mit H-Struktur. Ein Zusammenhang ∇^P auf TM mit Holonomie G und Torsion T heißt* ***kanonisch****, wenn $G = H$ und T total antisymmetrisch bezüglich einer Metrik, die mit H verträglich ist.*

g_h kann nun so gewählt werden, dass ∇^P bezüglich g_h metrisch ist. Man sagt dann auch, der kanonische Zusammenhang sei mit g_h kompatibel. ∇^P lässt sich durch Störung des Levi-Civita-Zusammenhanges ∇^{LC} mit der 3-Form P konstruieren, wobei letztere von der Struktur der betrachteten Mannigfaltigkeit abhängt. Auf Mannigfaltigkeiten mit reellen Killing-Spinoren ist ∇^P ein Instanton. Man kann zeigen, dass dies auch für allgemeine Coseträume gilt [50].

Der Instanton-Zusammenhang ∇^A auf dem Zylinder genügt der Instantongleichung,

$$*F = - * Q_Z \wedge F, \tag{8.169}$$

Hierbei bezeichnet Q_Z die mit der G-Struktur von Z assoziierte Casimir-4-Form. ∇^A ist durch eine Störung des kanonischen Zusammenhangs gegeben. Einer solchen Störung von ∇^P auf M entspricht dessen Lift auf TZ[20]. Im Folgenden sei die Störung durch eine (von der zugrundeliegenden Struktur von M abhängige) charakteristische Anzahl paralleler Schnitte in $T^*Z \otimes End(TZ)$ so gegeben, dass die Eichgruppe von ∇^P der Strukturgruppe von M entspricht.

Bestimmung von ∇^P. Im Fall, dass M Sasaki-Einstein ist, ist $G = SU(n)$. Die Komponenten des kanonischen Zusammenhangs ergeben sich wie folgt [20]:

$$\begin{aligned} {}^P\Gamma^b_{\mu a} &= {}^{LC}\,\Gamma^b_{\mu a} + \frac{1}{m}P_{\mu a b}, \\ -{}^P\Gamma^1_{\mu a} = {}^P\,\Gamma^a_{\mu 1} &= {}^{LC}\,\Gamma^a_{\mu 1} + P_{\mu 1 a}. \end{aligned} \tag{8.170}$$

Hierbei bezeichnet ${}^{LC}\Gamma^a_{\mu b}$ die Komponenten des Levi-Civita-Zusammenhanges. Damit folgt für die Komponenten der Torsion T von ∇^P mit Hilfe der Maurer-Cartan-Gleichung

$$T^1 = P_{1\mu\nu}e^\mu \wedge e^\nu,\ T^a = \frac{n+1}{2n}P_{a\mu\nu}e^\mu \wedge e^\nu. \tag{8.171}$$

Ansatz einer Metrik, bezüglich derer ∇^P metrisch ist. ∇^P ist nun mit folgender Wahl von g_h verträglich:

$$g_h := e^1 \otimes e^1 + \exp(2h)\delta_{ab}e^a \otimes e^b. \tag{8.172}$$

Durch diese Vorschrift ist eine Familie von Metriken gegeben, die Sasaki bis auf Skalierung sind, das heißt $g_{h,\gamma} := \gamma^2 g_h$ ist Sasaki mit $\gamma \in \mathbb{R}$: Laut Bemerkung 6.4.5 gilt

$$de^1 = 2\omega = 2(e^{23} + ... + e^{2n2n+1}); \tag{8.173}$$

in einer neuen Basis

$$\{\tilde{e}^1, \tilde{e}^a\} := \{\gamma e^1, \gamma \exp(h)e^a\} \tag{8.174}$$

wird (8.173) zu

$$\begin{aligned} de^1 = 2\omega = \gamma^{-1}d\tilde{e}^1 = 2\gamma^{-2}\exp(-2h)(\tilde{e}^{23} + ... + \tilde{e}^{2n2n+1}) = 2\gamma^{-2}\exp(-2h)\tilde{\omega} \\ \Rightarrow d\tilde{e}^1 = 2\gamma^{-1}\exp(-2h)\tilde{\omega}. \end{aligned} \tag{8.175}$$

Für $h = 0$ ist $g_{h,\gamma}$ Einstein. Für

$$\exp(2h) = \frac{2n}{n+1} \tag{8.176}$$

wird die Torsion zu einer antisymmetrischen 3-Form und

$$d\tilde{e}^1 = d\tilde{\eta} = \alpha(\gamma, h)\tilde{\omega}, \tag{8.177}$$

mit $\alpha(\gamma, h) = \frac{n+1}{\gamma n}$. Folglich definiert $g_{h,\gamma}$ für alle α eine α-Sasaki-Struktur auf M.

Wenn $\alpha = 2$ ($\Leftrightarrow \gamma = \exp(-2h)$), wird diese Sasaki (vgl. [51]). Im Fall von $M = SU(3)/SU(2) \cong S^5$ ist mit Strukturkonstanten gewählt wie in (8.5.1) $\alpha = -\frac{1}{2}$ (siehe [52] mit dortigen Referenzen): Auf fünfdimensionalen Sasaki-Mannigfaltigkeiten M^5 lassen sich die Formen η und ω aus 6.4.5 in einer orthonormalen Dualbasis $e^\mu,\ \mu = \{a, 5\}$, schreiben als

$$\eta = -e^5,\ \omega \equiv \omega^3 = \frac{1}{2}\eta^3_{ab}e^a \wedge e^b. \tag{8.178}$$

Hierbei bezeichnet η^3_{ab} die Komponenten des 't Hooft-Tensors. Sei nun im Speziellen M^5 eine Mannigfaltigkeit mit $SU(2)$-Struktur. Dann lässt sich eine lokale Orthonormalbasis $e^1, ..., e^5$ so wählen, dass

$$\eta = -e^5,\ \omega^1 = e^{23} + e^{14},\ \omega^2 = e^{31} + e^{24},\ \omega^3 = e^{12} + e^{34}. \tag{8.179}$$

Betrachtet man nun einschränkend den Fall $M^5 = S^5$ mit Strukturkonstanten wie in (8.5.1) und Cartan-Killing-Metrik, so lässt sich zeigen, dass eine Reskalierung der Generatoren

$$I_a \to \frac{1}{\beta} I_a = \hat{I}_a,\ I_5 \to \frac{1}{\iota} I_5 = \hat{I}_5,\ I_i \to I_i = \hat{I}_i \tag{8.180}$$

durch die Wahl von $(\iota, \beta) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^+$ verschiedene Arten von $SU(2)$-Strukturen hervorbringt. In der neuen Dualbasis $\tilde{e}^\mu$ ist nun

$$d\hat{\eta} = -\frac{\iota}{2\beta^2}\hat{\omega}^3. \tag{8.181}$$

Folglich versieht eine Wahl der Generatoren wie in 8.5.1 wegen $(\iota, \beta) = (1, 1)$ S^5 mit einer $\alpha = -\frac{1}{2}$-Sasaki-Struktur und Cartan-Killing-Metrik $g_{CK} = \delta_{ab} e^a \otimes e^b + e^5 \otimes e^5$. Für eine Reskalierung $(\iota, \beta) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ ($\Rightarrow$ $\alpha = 2$) ergibt sich $g_{CK} = 12\delta_{ab}\hat{e}^a \otimes \hat{e}^b + 9\hat{e}^5 \otimes \hat{e}^5$. Dies entspricht gerade $g_{\gamma,h}$ mit der Wahl $\exp(2h) = \frac{4}{3}$, $\gamma = 3$ und einer Reskalierung $e^a = \frac{1}{2\sqrt{3}}\hat{e}^a$, $e^1 = -\frac{1}{3}\hat{e}^1$.

Bestimmung der Instantongleichungen auf $\mathbb{R} \times M$. Die Casimir-4-Form Q_Z auf dem Zylinder über einer Sasaki-Einstein-Mannigfaltigkeit hängt vom Scharparameter h aus dem Ansatz (8.172) für die Metrik g_h ab, wobei nun $h = h(t)$,

$$Q_Z = \exp(2h(t))dt \wedge P + \exp(4h(t))Q. \tag{8.182}$$

Die Instantongleichungen auf dem Zylinder ergeben sich nun als Differentialgleichungen erster Ordnung für reelle Funktionen $\Phi = \Phi(t), \Psi = \Psi(t)$ mit folgendem Ansatz für den Zusammenhang ∇^A auf $\mathbb{R} \times M$[20]:

$$\nabla^A = \nabla^P + \Psi(t)e^1 I_1 + \Phi(t)e^a I_a \tag{8.183}$$

Hierbei sind die Generatoren so gewählt, dass

$$I_{ia}^b = f_{ia}^b$$
$$I_{1a}^b = -\frac{1}{m}\omega_{ab},\ -I_{11}^0 = I_{10}^1 = 1, \tag{8.184}$$
$$-I_{ab}^0 = I_{a0}^b = \delta_a^b,\ -I_{ab}^1 = I_{a1}^b = \omega_{ab}. \tag{8.185}$$

Die Strukturkonstanten sind in dieser Basis gegeben durch

$$f_{ab}^1 = -2P_{ab1},\ f_{ab}^c = 0,\ f_{1a}^b = -\frac{m+1}{m}P_{1ab}. \tag{8.186}$$

Damit lauten die Instantongleichungen:

$$\dot{\Psi} = 2n\exp(-2h)(\Phi^2 - \Psi) \tag{8.187}$$

$$\dot{\Phi} = \frac{n+1}{n}\Phi(\Psi - 1) \tag{8.188}$$

Von Instantonen im Sasaki-Einstein-Fall zu Yang-Mills Lösungen auf α-Sasaki-Mannigfaltigkeiten. Aus den Instantongleichungen (8.187) und (8.188) lassen sich im Fall von α-Sasaki-Mannigfaltigkeiten $M = SU(n+1)/SU(n)$ die Yang-Mills-Gleichungen durch einfaches Differenzieren herleiten und somit die Resultate (8.41) bzw. (8.42) konkret überprüfen, denn die Wahl der flachen Killing-Metrik (8.8) und antisymmetrischen Torsion (8.16) entspricht im Fall von Sasaki-Einstein-Mannigfaltigkeiten $M = SU(n+1)/SU(n)$ (bis auf Reskalierung) gerade der Wahl $g_{h,\gamma}$ mit (8.176),

$$\gamma^2 \left(e^1 \otimes e^1 + \frac{2n}{n+1} \delta_{ab} e^a \otimes e^b \right) = \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} e^{\tilde{a}} \otimes e^{\tilde{b}} \tag{8.189}$$

mit einer Aufspaltung des Indexbereiches so, dass $\{a^{'}\} = \{2, 3, 4, ..., 2n+1\}, \{a^{''}\} = \{1\}$, mit $\tilde{a} \in \{1, a'\}$.

Die Yang-Mills-Gleichungen (8.27) bzw. (8.28) lassen sich nun nach Indexziehen mit $g_{h,\gamma}$, $\exp(2h) = \frac{2n}{n+1}$, in der Feldstärke (8.15) konkret bestimmen. Es zeigt sich, dass sich bei Verwendung dieser Metrik statt der flachen Killing-Metrik, also nach nicht-einheitlicher Reskalierung der Basis für den Coset gemäß (8.174), bis auf einen gemeinsamen Faktor $\gamma^2 \exp(-2h)$ wieder das Resultat wie in (8.32) ergibt. Die ausführliche Rechnung dazu findet sich im Anhang B.

Aus (8.187) und (8.188) folgt mit (8.176) nach Differenzieren und einer Reskalierung $t \to (n+1)^2 t$

$$\ddot{\Psi} = \frac{2}{n} \Phi^2 \Psi - \left(\frac{2}{n} + 1 \right) \Phi^2 + \Psi \tag{8.190}$$

$$\ddot{\Phi} = \frac{1}{n^2} \Phi \Psi^2 - \left(\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} \right) \Phi \Psi + \frac{1}{n^2} \Phi + \frac{1}{n} \Phi^3. \tag{8.191}$$

Koeffizientenvergleich mit (8.41) bzw. (8.42) liefert für die Faktoren in (8.190) bzw. (8.191)

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{n} = \alpha_1^{''} + \alpha_2^{''} + \alpha_5^{''}, \ \left(\frac{2}{n} + 1 \right) = \frac{1}{2} \alpha_1^{''} (\kappa + 3), \ 1 = \frac{1}{2} \alpha^{''} (\kappa + 2) - \frac{1}{2}, \\
&\frac{1}{n^2} = \alpha_2^{'} + \alpha_3^{'} + \alpha_7^{'}, \ \left(\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} \right) = (\kappa + 3) \alpha_2^{'}, \ \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \alpha^{'} (\kappa + 2) - \frac{1}{2} \\
&\frac{1}{n} = \alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_5'
\end{aligned} \tag{8.192}$$

Nach einer Reskalierung $t \to \sqrt{\frac{2}{n}} t$ in (8.190) und (8.191) sowie mit $\kappa = \kappa(n) = n - 1$ ist (8.192) mit den für S^{2n+1} ermittelten Werten (8.85) erfüllt.

Kapitel 9

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die Yang-Mills-Gleichungen mit total antiysmmetrischer Torsion $T_{abc} = \kappa f_{abc}$, modelliert durch Werte $\kappa \in \mathbb{R}$, auf Mannigfaltigkeiten (M, g_{CK}) auf analytische Lösungen für G-invariante Zusammenhänge $A \in \Lambda^1(M, \mathscr{G})$ untersucht, wobei $A = X_i e^i + X_a e^a$ in einer Basis $\{e^i, e^a\}$ für T^*M und $X_i, X_a \in \mathscr{G}$. M ist Basismannigfaltigkeit des zu $P = ((\mathbb{R} \times G/H) \times G, \pi, \mathbb{R} \times G/H, G)$ assoziierten Vektorbündels $\mathscr{E} = P \times_{Ad} \mathscr{G}$, g_{CK} bezeichnet die Cartan-Killing-Metrik. G-Invarianz wird durch Erfüllen der Gleichung $[I_i, X_a] = f^b_{ia} X_b$ gewährleistet. Diese Bedingung folgt aus der Tatsache, dass allgemein eine unmittelbare Korrespondenz zwischen K-invarianten Zusammenhängen auf G-Bündeln mit zusätzlich wirkender Automorphismengruppe K und der Menge von Lie-Algebra-Homöomorphismen $\Lambda : \mathscr{K} \to \mathscr{G}$ existiert und $\mathscr{K}$ sich nach seiner Stabilisatorgruppe $\mathscr{J}$ zerlegen lässt. Unter Berücksichtigung dieser Gegebenheiten lassen sich über die G-Invarianz-Bedingung die Koeffizienten $X_i, X_a \in \mathscr{G}$ des Zusammenhangs bestimmen. Ein Ansatz für A mit $X_a = \Phi I_a$, wobei $\Phi = \Phi(t, a)$, erweist sich dabei als der allgemeinster Gültigkeit.

Für die verschiedenen Basismannnigfaltigkeiten vom Typ α-Sasaki und 3-Sasaki, $S^{2n+1} = SU(n+1)/SU(n)$ bzw. $S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n)$ ergeben sich die Yang-Mills Gleichungen mit Torsion nach geeigneter Basiswahl und passender Unterteilung der Menge von Generatoren $\{I_a\}$ des Cosets gemäß $\{a\} = \{a'\} \cup \{a''\}$; letztere trägt dem Umstand Rechnung, dass Sasaki- und 3-Sasaki-Struktur ein bzw. drei Reeb-Vektorfelder auszeichnen.

Alternativ lassen sich die Yang-Mills-Gleichungen mit total antisymmetrischer Torsion auf α-Sasaki-Mannigfaltigkeiten statt mit g_{CK} mit einem Vertreter einer Familie von Sasaki-Metriken g_h herleiten, wobei hierfür im Speziellen $\exp(2h) = \frac{2n}{n+1}$ zu wählen ist: g_{CK} und g_h gehen durch (nicht-einheitliche) Reskalierung der Generatoren $I_{a'}, I_{a''}$ auseinander hervor. Es wurde gezeigt, dass dies die Yang-Mills-Gleichungen nur um einen einheitlichen Faktor ändert. Auf Grundlage dieser Argumentation konnte das auf obigem Wege erlangte Ergebnis für die Yang-Mills-Gleichungen durch Ableiten der Instantongleichung auf Sasaki-Einstein-Mannigfaltigkeiten aus [20] bestätigt werden.

Als analytische Lösungen endlicher Wirkung zwischen zwei kritischen Punkten des zu den Yang-Mills-Gleichungen gehörigen Potentials V ergaben sich in allen Fällen von betrachteten Sphären für verschiedene Werte von κ Kinklösungen für Φ. V weist dann spezielle Symmetrie auf. Die nur von der Zeit abhängigen Kinklösungen interpolieren verschiedene Vakuumzustände und sind stabil, da Zeitentwicklung als Transformation stetig ist und die Energie endlich lässt; derartige Transformationen vermögen das Feld nicht in eine konstante Lösung verschwindender Energie zu überführen [49].

Dyonen (Teilchen mit sowohl magnetischer als auch elektrischer Ladung) und periodische Kinklösungen/Sphaleronen findet man durch Übergang von euklidischer zur Lorentzmetrik durch die Ersetzung $t \to it$ bzw. durch Annahme, dass t periodisch mit Periode L ist. Dyonische Lösungen vom Typ Secans Hyperbolicus laufen dabei in Zeitrichtung von einem kritischen Punkt ausgehend parallel zu einer Achse bis zu einem festen Wert $1/\alpha$ und wieder zurück, wobei $1/\alpha$ der Stauchfaktor des sech ist. Es handelt sich um sogenannte Bounce-Lösungen. Periodische Lösungen vom Typ sinus amplitudinis entsprechen anschaulich immer abwechselnd zu einer Kette angeordeten Kinks und Antikinks. Für kleinstmögliches L ergibt sich ein Sphaleron, eine Kette bestehend aus nur zwei Gliedern. Diese befinden sich zwar im instabilen Gleichgewicht, üben jedoch aufgrund der Tatsache, dass sie sich genau gegenüber liegen, keine Anziehung aufeinander aus, was eine gegenseitige Auslöschung verhindert [49].

Anhang A

Herleitung der modifizierten Yang-Mills-Gleichungen mit flacher Metrik

Mit $\{a\} = \{a'\} \cup \{a''\}$ vereinfachen sich die einzelnen Faktoren in (8.34)

$$I' := \frac{1}{2}(\kappa+1) f_{b'cd} f_{a'cd} - f_{b'cj} f_{a'cj}, \tag{A.1}$$

$$I'' := \frac{1}{2}(\kappa+1) f_{b'cd} f_{a''cd} - f_{b'cj} f_{a''cj} \tag{A.2}$$

$$II := f_{b'c'd'}[X_{c'}, X_{d'}] + f_{b'c'd''}[X_{c'}, X_{d''}] + f_{b'c''d'}[X_{c''}, X_{d'}] + f_{b'c''d''}[X_{c''}, X_{d''}] \tag{A.3}$$

$$III := [X_{a'}, [X^{a'}, X^{b'}]] - [X_{a''}, [X^{a''}, X^{b'}]] \tag{A.4}$$

mit der Annahme (8.37) bzw. (8.38) zu

$$I' = \frac{1}{2}(\kappa+1)\alpha'\delta_{b'a'} - \frac{1}{2}\left(1-\alpha'\right)\delta_{b'a'} \ , \tag{A.5}$$

$$I'' = \frac{1}{2}(\kappa+1) f_{b'cd} f_{a''cd} - f_{b'cj} f_{a''cj} \ , \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}
II =& f_{b'c'd'}\tilde{\Phi}^2\left(f_{c'd'e'}I_{e'} + f_{c'd'e''}I_{e''} + f_{c'd'j}I_j\right)\\
&+ f_{b'c'd''}\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}\left(f_{c'd''e'}I_{e'} + f_{c'd''e''}I_{e''} + f_{c'd''j}I_j\right)\\
&+ f_{b'c''d'}\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}\left(f_{c''d'e'}I_{e'} + f_{c''d'e''}I_{e''} + f_{c''d'j}I_j\right)\\
&+ f_{b'c''d''}\tilde{\Psi}^2\left(f_{c''d''e'}I_{e'} + f_{c''d''e''}I_{e''} + f_{c''d''j}I_j\right)\\
=& f_{b'c'd'}\tilde{\Phi}^2\left(f_{c'd'e}I_e + f_{c'd'j}I_j\right)\\
&+ 2f_{b'c'd''}\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}\left(f_{c'd''e}I_e + f_{c'd''j}I_j\right)\\
&+ f_{b'c''d''}\tilde{\Psi}^2\left(f_{c''d''e}I_e + f_{c''d''j}I_j\right).
\end{aligned}$$

$III = \underbrace{\tilde{\Phi}^3[I_{a'},[I^{a'},I^{b'}]]}_{:=III'} + \underbrace{\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}^2[I_{a''},[I^{a''},I^{b'}]]}_{:=III''}$ ist mit

$$III' = \tilde{\Phi}^3[I^{a'}, f_{a'b'c'}I_{c'} + f_{a'b'c''}I_{c''} + f_{a'b'j}I_j] \,, \tag{A.7}$$
$$III'' = \tilde{\Phi}\tilde{\Psi}^2[I^{a''}, f_{a''b'c'}I_{c'} + f_{a''b'c''}I_{c''} + f_{a''b'j}I_j] \tag{A.8}$$

schließlich

$$\begin{aligned}
III =& \tilde{\Phi}^3 f_{a'b'c'}\left(f_{a'c'e'}I_{e'} + f_{a'c'e''}I_{e''} + f_{a'c'j}I_j\right)\\
&+ \tilde{\Phi}^3 f_{a'b'c''}\left(f_{a'c''e'}I_{e'} + f_{a'c''e''}I_{e''} + f_{a'c''j}I_j\right)\\
&+ \tilde{\Phi}^3 f_{a'b'j}\left(f_{a'je'}I_{e'} + f_{a'je''}I_{e''}\right)\\
&+ \tilde{\Phi}\tilde{\Psi}^2 f_{a''b'c'}\left(f_{a''c'e'}I_{e'} + f_{a''c'e''}I_{e''} + f_{a''c'j}I_j\right)\\
&+ \tilde{\Phi}\tilde{\Psi}^2 f_{a''b'c''}\left(f_{a''c''e'}I_{e'} + f_{a''c''e''}I_{e''} + f_{a''c''j}I_j\right)\\
&+ \tilde{\Phi}\tilde{\Psi}^2 f_{a''b'j}\left(f_{a''je'}I_{e'} + f_{a''je''}I_{e''}\right)\\
=& -\tilde{\Phi}^3\left(\left(f_{b'a'c}f_{ea'c} + f_{b'a'j}f_{ea'j}\right)I_e + f_{b'a'c}f_{ja'c}I_j\right)\\
&- \tilde{\Phi}\tilde{\Psi}^2\left(\left(f_{b'a''c}f_{ea''c} + f_{b'a''j}f_{ea''j}\right)I_e + f_{b'a''c}f_{ja''c}I_j\right).
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Damit ist (8.34)

$$\begin{aligned}
\ddot{\tilde{\Phi}} I_{b'} =& \left(\frac{1}{2}(\kappa+1)\,\alpha'\delta_{b'a'} - \frac{1}{2}\left(1-\alpha'\right)\delta_{b'a'}\right)\tilde{\Phi} I_{a'}\\
&+ \left(\frac{1}{2}(\kappa+1)\,f_{b'cd}f_{a''cd} - f_{b'cj}f_{a''cj}\right)\tilde{\Psi} I_{a''}\\
&- \frac{1}{2}(\kappa+3)\left(f_{b'c'd'}\tilde{\Phi}^2\left(f_{c'd'e}I_e + f_{c'd'j}I_j\right)\right.\\
&- 2f_{b'c'd''}\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}\left(f_{c'd''e}I_e + f_{c'd''j}I_j\right)\\
&\left.- f_{b'c''d''}\tilde{\Psi}^2\left(f_{c''d''e}I_e + f_{c''d''j}I_j\right)\right)\\
&+ \tilde{\Phi}^3\left(\left(f_{b'a'c}f_{ea'c} + f_{b'a'j}f_{ea'j}\right)I_e + f_{b'a'c}f_{ja'c}I_j\right)\\
&+ \tilde{\Phi}\tilde{\Psi}^2\left(\left(f_{b'a''c}f_{ea''c} + f_{b'a''j}f_{ea''j}\right)I_e + f_{b'a''c}f_{ja''c}I_j\right).
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Unter Berücksichtigung von (8.39) und (8.40) vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned}
\ddot{\tilde{\Phi}} I_{b'} =& \left(\frac{1}{2}(\kappa+1)\,\alpha'\delta_{b'a'} - \frac{1}{2}\left(1-\alpha'\right)\delta_{b'a'}\right)\tilde{\Phi} I_{a'}\\
&- \frac{1}{2}(\kappa+3)\left(\tilde{\Phi}^2\underbrace{f_{b'c'd'}f_{c'd'e}I_e}_{:=\alpha'_1 I_{b'}} + 2\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}\underbrace{f_{b'c'd''}f_{c'd''e}I_e}_{:=\alpha'_2 I_{b'}} + \tilde{\Psi}^2\underbrace{f_{b'c''d''}f_{c''d''e}I_e}_{:=\alpha'_3 I_{b'}}\right)\\
&+ \tilde{\Phi}^3\left(\underbrace{f_{b'a'c}f_{ea'c}I_e}_{:=(\alpha'_1+\alpha'_2)I_{b'}} + \underbrace{f_{b'a'j}f_{ea'j}I_e}_{:=\alpha'_5 I_{b'}}\right) + \tilde{\Phi}\tilde{\Psi}^2\left(\underbrace{f_{b'a''c}f_{ea''c}I_e}_{:=(\alpha'_2+\alpha'_3)I_{b'}} + \underbrace{f_{b'a''j}f_{ea''j}I_e}_{:=\alpha'_7 I_{b'}}\right)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Die modifizierten Yang-Mills-Gleichungen lauten also

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{\Phi}} =& \frac{1}{2}\alpha^{'}\left(\kappa+2\right)\tilde{\Phi}-\frac{1}{2}\tilde{\Phi}-\left(\frac{1}{2}\kappa+\frac{3}{2}\right)\left(\tilde{\Phi}^2\alpha_1^{'}+2\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}\alpha_2^{'}+\tilde{\Psi}^2\alpha_3^{'}\right)\\ &+\tilde{\Phi}^3\left(\alpha_1^{'}+\alpha_2^{'}+\alpha_5^{'}\right)+\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}^2\left(\alpha_2^{'}+\alpha_3^{'}+\alpha_7^{'}\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{\Psi}} =& \frac{1}{2}\alpha^{''}\left(\kappa+2\right)\tilde{\Psi}-\frac{1}{2}\tilde{\Psi}-\left(\frac{1}{2}\kappa+\frac{3}{2}\right)\left(\tilde{\Psi}^2\alpha_3^{''}+2\tilde{\Phi}\tilde{\Psi}\alpha_2^{''}+\tilde{\Phi}^2\alpha_1^{''}\right)\\ &+\tilde{\Psi}^3\left(\alpha_3^{''}+\alpha_2^{''}+\alpha_7^{''}\right)+\tilde{\Psi}\tilde{\Phi}^2\left(\alpha_2^{''}+\alpha_1^{''}+\alpha_5^{''}\right).\end{aligned}$$

Anhang B

Herleitung der modifizierten Yang-Mills-Gleichungen mit Sasaki-Metrik g_h für $h \neq 0$

Es sei die Sasaki-Metrik g_h gegeben wie in (8.172) und die Feldstärke F wie in (8.15). Aus

$$\begin{aligned}
F^{0b} &= g_h^{00} g_h^{cb} F_{0c} = g_h^{1b} F_{01} + g_h^{\tilde{c}b} F_{0\tilde{c}} = \gamma^2 \delta_{1b} F_{01} + \gamma^2 e^{-2h} \delta_{\tilde{c}b} F_{0\tilde{c}} && \text{(B.1)}\\
F^{01} &= \gamma^2 \dot{X}_1 && \text{(B.2)}\\
F^{bc} &= g_h^{ab} g_h^{dc} F_{ad} = g_h^{1b} g_h^{1c} F_{11} + g_h^{1b} g_h^{\tilde{d}c} F_{1\tilde{d}} + g_h^{\tilde{a}b} g_h^{1c} F_{\tilde{a}1} + g_h^{\tilde{a}b} g_h^{\tilde{d}c} F_{\tilde{a}\tilde{d}}\\
&= \gamma^4 F_{11} \delta_{1b} \delta_{1c} + \gamma^4 e^{-2h} F_{1\tilde{d}} \delta_{1b} \delta_{\tilde{d}c} + \gamma^4 e^{-2h} F_{\tilde{a}1} \delta_{\tilde{a}b} \delta_{1c} + \gamma^4 e^{-4h} F_{\tilde{a}\tilde{d}} \delta_{\tilde{a}b} \delta_{\tilde{d}c} && \text{(B.3)}\\
F^{1\tilde{c}} &= \gamma^4 e^{-2h} F_{1\tilde{c}} = \gamma^4 e^{-2h} \left(-f_{1\tilde{c}}^i I_i - f_{1\tilde{c}}^{\tilde{a}} X_{\tilde{a}} + [X_1, X_{\tilde{c}}] \right), && \text{(B.4)}\\
F^{\tilde{b}1} &= \gamma^4 e^{-2h} F_{\tilde{b}1} = \gamma^4 e^{-2h} \left(-f_{\tilde{b}1}^i I_i - f_{\tilde{b}1}^{\tilde{a}} X_{\tilde{a}} + [X_{\tilde{b}}, X_1] \right) && \text{(B.5)}\\
F^{\tilde{b}\tilde{c}} &= \gamma^4 e^{-2h} F_{\tilde{b}\tilde{c}} = \gamma^4 e^{-4h} \left(-f_{\tilde{b}\tilde{c}}^i I_i - f_{\tilde{b}\tilde{c}}^{\tilde{a}} X_{\tilde{a}} + [X_{\tilde{b}}, X_{\tilde{c}}] \right) && \text{(B.6)}\\
F^{\tilde{b}c} &= \gamma^4 e^{-2h} F_{\tilde{a}1} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{1c} + \gamma^4 e^{-4h} F_{\tilde{a}\tilde{d}} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{\tilde{d}c}\\
&= \gamma^4 e^{-2h} F_{\tilde{b}c} \left(\delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{1c} + e^{-2h} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{\tilde{d}c} \right) && \text{(B.7)}
\end{aligned}$$

folgt sofort

$$F^{0\tilde{b}} = \gamma^2 e^{-2h} F_{0\tilde{b}} = \gamma^2 e^{-2h} \dot{X}_{\tilde{b}} \tag{B.8}$$

$$F^{11} = \gamma^4 F_{11} = 0 \tag{B.9}$$

Damit erhält man die restlichen Terme (8.28):

$$E_0 F^{0\tilde{b}} = \gamma^2 e^{-2h} \ddot{X}_{\tilde{b}} \tag{B.10}$$

$$E_0 F^{01} = \gamma^2 \ddot{X}_1 \tag{B.11}$$

$$E_a F^{ab} = 0 \tag{B.12}$$

$$\omega_{da}^d F^{ab} = \omega_{d\tilde{a}}^d F^{\tilde{a}b} + \omega_{d1}^d F^{1b} \tag{B.13}$$

$$
\begin{aligned}
\omega^d_{d\tilde{a}} F^{\tilde{a}b} &= \left(\delta_{\tilde{a}\tilde{c}}\delta_{1b} + e^{-2h}\delta_{\tilde{a}\tilde{c}}\delta_{\tilde{e}b}\right)\gamma^4 e^{-2h}\left(e^i_d f^d_{i\tilde{a}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\kappa+1) f^d_{d\tilde{a}}}_{=0}\right)\left(-f^j_{\tilde{a}b} I_j - f^g_{\tilde{a}b} X_g + [X_{\tilde{a}}, X_b]\right) \\
&= \left(\delta_{\tilde{a}\tilde{c}}\delta_{1b} + e^{-2h}\delta_{\tilde{a}\tilde{c}}\delta_{\tilde{e}b}\right)\gamma^4 e^{-2h}\left(-e^i_d f^d_{i\tilde{a}} f^j_{\tilde{a}b} I_j - e^i_d f^d_{i\tilde{a}} f^g_{\tilde{a}b} X_g + e^i_d f^d_{i\tilde{a}} [X_{\tilde{a}}, X_b]\right) \\
&= \left(\delta_{\tilde{a}\tilde{c}}\delta_{1b} + e^{-2h}\delta_{\tilde{a}\tilde{c}}\delta_{\tilde{e}b}\right)\gamma^4 e^{-2h}\left(-e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i\tilde{a}} - e^i_1 f^1_{i\tilde{a}}\right)\left(f^j_{\tilde{a}b} I_j + f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}b} X_{\tilde{g}} + f^1_{\tilde{a}b} X_1 - [X_{\tilde{a}}, X_b]\right) \\
&= -\left(\delta_{\tilde{a}\tilde{c}}\delta_{1b} + e^{-2h}\delta_{\tilde{a}\tilde{c}}\delta_{\tilde{e}b}\right)\gamma^4 e^{-2h}(e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i\tilde{a}} f^j_{\tilde{a}b} I_j + e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i\tilde{a}} f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}b} X_{\tilde{g}} + e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i\tilde{a}} f^1_{\tilde{a}b} X_1 \\
&\quad - e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i\tilde{a}} [X_{\tilde{a}}, X_b] + e^i_1 f^1_{i\tilde{a}} f^j_{\tilde{a}b} I_j + e^i_1 f^1_{i\tilde{a}} f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}b} X_{\tilde{g}} + e^i_1 f^1_{i\tilde{a}} f^1_{\tilde{a}b} X_1 - e^i_1 f^1_{i\tilde{a}} [X_{\tilde{a}}, X_b])
\end{aligned}
\tag{B.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega^d_{d1} F^{1b} = \omega^d_{d1} F^{1\tilde{b}} &= \gamma^4 e^{-4h}\left(e^i_d f^d_{i1} + \underbrace{\frac{1}{2}(\kappa+1) f^d_{d1}}_{=0}\right)\left(-f^j_{1\tilde{b}} I_j - f^g_{1\tilde{b}} X_g + [X_1, X_{\tilde{b}}]\right) \\
&= \gamma^4 e^{-4h}\left(-e^i_d f^d_{i1} f^j_{1\tilde{b}} I_j - e^i_d f^d_{i1} f^{\tilde{g}}_{1\tilde{b}} X_{\tilde{g}} - \underbrace{e^i_d f^d_{i1} f^1_{1\tilde{b}} X_1}_{=0} + e^i_d f^d_{i1} [X_1, X_{\tilde{b}}]\right) \\
&= -\gamma^4 e^{-4h} e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i1}\left(f^j_{1\tilde{b}} I_j + f^{\tilde{g}}_{1\tilde{b}} X_{\tilde{g}} - [X_1, X_{\tilde{b}}]\right) \\
&= -\gamma^4 e^{-4h}\left(e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i1} f^j_{1\tilde{b}} I_j + e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i1} f^{\tilde{g}}_{1\tilde{b}} X_{\tilde{g}} - e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i1} [X_1, X_{\tilde{b}}]\right)
\end{aligned}
\tag{B.15}
$$

$$
\omega^d_{da} F^{ab} = \begin{cases} \omega^d_{d\tilde{a}} F^{\tilde{a}1} & \text{für} \quad b = 1 \\ \\ \omega^d_{d\tilde{a}} F^{\tilde{a}\tilde{b}} + \omega^1_{d1} F^{1\tilde{b}} & \text{für} \quad b = \tilde{b} \end{cases}
\tag{B.16}
$$

$$
= \begin{cases} -\gamma^4 e^{-2h}(e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i\tilde{a}} f^j_{\tilde{a}1} I_j + e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i\tilde{a}} f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}1} X_{\tilde{g}} + e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i\tilde{a}} f^1_{\tilde{a}1} X_1 - e^i_{\tilde{d}} f^{\tilde{d}}_{i\tilde{a}} [X_{\tilde{a}}, X_1] & \\ +e^i_1 f^1_{i\tilde{a}} f^j_{\tilde{a}1} I_j + e^i_1 f^1_{i\tilde{a}} f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}1} X_{\tilde{g}} - e^i_1 f^1_{i\tilde{a}} [X_{\tilde{a}}, X_1]) & \text{für} \quad b = 1 \\ \\ -\gamma^4 e^{-4h}\left(e^i_d f^d_{ia} f^j_{a\tilde{b}} I_j + e^i_d f^d_{ia} f^g_{a\tilde{b}} X_g + e^i_d f^d_{ia} [X_a, X_{\tilde{b}}]\right) & \text{für} \quad b = \tilde{b} \end{cases}
$$

$$
\omega^b_{cd} F^{cd} = \omega^b_{\tilde{c}\tilde{d}} F^{\tilde{c}\tilde{d}} + \omega^b_{1\tilde{d}} F^{1\tilde{d}} + \omega^b_{\tilde{c}1} F^{\tilde{c}1}
\tag{B.17}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega^b_{\tilde{c}\tilde{d}} F^{\tilde{c}\tilde{d}} &= \gamma^4 e^{-4h}\left(e^i_{\tilde{c}} f^b_{i\tilde{d}} + \frac{1}{2}(\kappa+1) f^b_{\tilde{c}\tilde{d}}\right)\left(-f^j_{\tilde{c}\tilde{d}} I_j - f^{\tilde{e}}_{\tilde{c}\tilde{d}} X_{\tilde{e}} + [X_{\tilde{c}}, X_{\tilde{d}}]\right) \\
&= \gamma^4 e^{-4h}\left(-e^i_{\tilde{c}} f^b_{i\tilde{d}} f^j_{\tilde{c}\tilde{d}} I_j - e^i_{\tilde{c}} f^b_{i\tilde{d}} f^{\tilde{e}}_{\tilde{c}\tilde{d}} X_{\tilde{e}} + e^i_{\tilde{c}} f^b_{i\tilde{d}} [X_{\tilde{c}}, X_{\tilde{d}}]\right) \\
&\quad + \gamma^4 e^{-4h}\left(-\frac{1}{2}(\kappa+1) f^b_{\tilde{c}\tilde{d}} f^j_{\tilde{c}\tilde{d}} I_j - \frac{1}{2}(\kappa+1) f^b_{\tilde{c}\tilde{d}} f^{\tilde{e}}_{\tilde{c}\tilde{d}} X_{\tilde{e}} + \frac{1}{2}(\kappa+1) f^b_{\tilde{c}\tilde{d}} [X_{\tilde{c}}, X_{\tilde{d}}]\right) \\
&= -\gamma^4 e^{-4h}(e^i_{\tilde{c}} f^b_{i\tilde{d}} f^j_{\tilde{c}\tilde{d}} I_j + e^i_{\tilde{c}} f^b_{i\tilde{d}} f^{\tilde{e}}_{\tilde{c}\tilde{d}} X_{\tilde{e}} - e^i_{\tilde{c}} f^b_{i\tilde{d}} [X_{\tilde{c}}, X_{\tilde{d}}] \\
&\quad + \frac{1}{2}(\kappa+1) f^b_{\tilde{c}\tilde{d}} f^j_{\tilde{c}\tilde{d}} I_j + \frac{1}{2}(\kappa+1) f^b_{\tilde{c}\tilde{d}} f^{\tilde{e}}_{\tilde{c}\tilde{d}} X_{\tilde{e}} - \frac{1}{2}(\kappa+1) f^b_{\tilde{c}\tilde{d}} [X_{\tilde{c}}, X_{\tilde{d}}])
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

$$\begin{aligned}\omega^b_{1\tilde{d}}F^{1\tilde{d}} &= \gamma^4 e^{-4h}\left(e^i_1 f^b_{i\tilde{d}} + \frac{1}{2}(\kappa+1)f^b_{1\tilde{d}}\right)\left(-f^j_{1\tilde{d}}I_j - f^{\tilde{e}}_{1\tilde{d}}X_{\tilde{e}} + [X_1, X_{\tilde{d}}]\right)\\ &= -\gamma^4 e^{-4h}(e^i_1 f^b_{i\tilde{d}}f^j_{1\tilde{d}}I_j + e^i_1 f^b_{i\tilde{d}}f^{\tilde{e}}_{1\tilde{d}}X_{\tilde{e}} - e^i_1 f^b_{i\tilde{d}}[X_1, X_{\tilde{d}}]\\ &+ \frac{1}{2}(\kappa+1)f^b_{1\tilde{d}}f^j_{1\tilde{d}}I_j + \frac{1}{2}(\kappa+1)f^b_{1\tilde{d}}f^{\tilde{e}}_{1\tilde{d}}X_{\tilde{e}} - \frac{1}{2}(\kappa+1)f^b_{1\tilde{d}}[X_1, X_{\tilde{d}}])\end{aligned} \tag{B.19}$$

$$\begin{aligned}\omega^b_{\tilde{c}1}F^{\tilde{c}1} &= \gamma^4 e^{-4h}\left(e^i_{\tilde{c}} f^b_{i1} + \frac{1}{2}(\kappa+1)f^b_{\tilde{c}1}\right)\left(-f^j_{\tilde{c}1}I_j - f^{\tilde{e}}_{\tilde{c}1}X_{\tilde{e}} + [X_{\tilde{c}}, X_1]\right)\\ &= -\gamma^4 e^{-4h}(e^i_{\tilde{c}} f^b_{i1}f^j_{\tilde{c}1}I_j + e^i_{\tilde{c}} f^b_{i1}f^{\tilde{e}}_{\tilde{c}1}X_{\tilde{e}} - e^i_{\tilde{c}} f^b_{i1}[X_{\tilde{c}}, X_1]\\ &+ \frac{1}{2}(\kappa+1)f^b_{\tilde{c}1}f^j_{\tilde{c}1}I_j + \frac{1}{2}(\kappa+1)f^b_{\tilde{c}1}f^{\tilde{e}}_{\tilde{c}1}X_{\tilde{e}} - \frac{1}{2}(\kappa+1)f^b_{\tilde{c}1}[X_{\tilde{c}}, X_1])\end{aligned} \tag{B.20}$$

$$\begin{aligned}\omega^b_{cd}F^{cd} &= -\gamma^4 e^{-4h}\sum_{c,d}(f^j_{cd}I_j(e^i_c f^b_{id} + \frac{1}{2}(\kappa+1)f^b_{cd}) + f^{\tilde{e}}_{cd}X_{\tilde{e}}(e^i_c f^b_{id} + \frac{1}{2}(\kappa+1)f^b_{cd}) -\\ &+ [X_c, X_d](e^i_c f^b_{id} - \frac{1}{2}(\kappa+1)f^b_{cd})\end{aligned} \tag{B.21}$$

$$[A_a, F^{ab}] = [A_{\tilde{a}}, F^{\tilde{a}b}] + [A_1, F^{1b}] \tag{B.22}$$

$$\begin{aligned}[A_{\tilde{a}}, F^{\tilde{a}b}] &= \gamma^4 e^{-2h}\left(\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{1c} + e^{-2h}\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{\tilde{c}c}\right)[e^i_{\tilde{a}}I_i + X_{\tilde{a}}, -f^j_{\tilde{a}b}I_j - f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}b}X_{\tilde{g}} + [X_{\tilde{a}}, X_b]]\\ &= \gamma^4 e^{-2h}\left(\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{1c} + e^{-2h}\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{\tilde{c}c}\right)\left(-e^i_{\tilde{a}}f^j_{\tilde{a}b}[I_i, I_j] - e^i_{\tilde{a}}f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}b}[I_i, X_{\tilde{g}}] + e^i_{\tilde{a}}[I_i, [X_{\tilde{a}}, X_b]]\right)\\ &+ \gamma^4 e^{-2h}\left(\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{1c} + e^{-2h}\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{\tilde{c}c}\right)\left(-f^j_{\tilde{a}b}[X_{\tilde{a}}, I_j] - f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}b}[X_{\tilde{a}}, X_{\tilde{g}}] + [X_{\tilde{a}}, [X_{\tilde{a}}, X_b]]\right)\\ &= -\gamma^4 e^{-2h}\left(\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{1c} + e^{-2h}\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{\tilde{c}c}\right)(e^i_{\tilde{a}}f^j_{\tilde{a}b}f^k_{ij}I_k + e^i_{\tilde{a}}f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}b}f^{\tilde{e}}_{i\tilde{g}}X_{\tilde{e}} + e^i_{\tilde{a}}f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}b}f^1_{i\tilde{g}}X_1\\ &+ e^i_{\tilde{a}}[X_b, [I_i, X_{\tilde{a}}]] + e^i_{\tilde{a}}[X_{\tilde{a}}, [X_b, I_i]] + f^j_{\tilde{a}b}f^{\tilde{e}}_{\tilde{a}j}X_{\tilde{e}} + f^j_{\tilde{a}b}f^1_{\tilde{a}j}X_1 + f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}b}[X_{\tilde{a}}, X_{\tilde{g}}]\\ &- [X_{\tilde{a}}, [X_{\tilde{a}}, X_b]])\\ &= -\gamma^4 e^{-2h}\left(\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{1c} + e^{-2h}\delta_{\tilde{a}\tilde{b}}\delta_{\tilde{c}c}\right)(e^i_{\tilde{a}}f^j_{\tilde{a}b}f^k_{ij}I_k + e^i_{\tilde{a}}f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}b}f^{\tilde{e}}_{i\tilde{g}}X_{\tilde{e}} + e^i_{\tilde{a}}f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}b}f^1_{i\tilde{g}}X_1\\ &+ e^i_{\tilde{a}}f^{\tilde{e}}_{i\tilde{a}}[X_b, X_{\tilde{e}}] + e^i_{\tilde{a}}f^1_{i\tilde{a}}[X_b, X_1] + e^i_{\tilde{a}}f^{\tilde{e}}_{bi}[X_{\tilde{a}}, X_{\tilde{e}}] + e^i_{\tilde{a}}f^1_{bi}[X_{\tilde{a}}, X_1]\\ &+ f^j_{\tilde{a}b}f^{\tilde{e}}_{\tilde{a}j}X_{\tilde{e}} + f^j_{\tilde{a}b}f^1_{\tilde{a}j}X_1 + f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}b}[X_{\tilde{a}}, X_{\tilde{g}}] - [X_{\tilde{a}}, [X_{\tilde{a}}, X_b]])\end{aligned} \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}[A_1, F^{1b}] &= [A_1, F^{1\tilde{b}}] = \gamma^4 e^{-4h}[e^i_1 I_i + X_1, -f^j_{1\tilde{b}}I_j - f^{\tilde{g}}_{1\tilde{b}}X_{\tilde{g}} + [X_1, X_{\tilde{b}}]]\\ &= \gamma^4 e^{-4h}\left(-e^i_1 f^j_{1\tilde{b}}[I_i, I_j] - e^i_1 f^{\tilde{g}}_{1\tilde{b}}[I_i, X_{\tilde{g}}] + e^i_1[I_i, [X_1, X_{\tilde{b}}]]\right)\\ &+ \gamma^4 e^{-4h}\left(-f^j_{1\tilde{b}}[X_1, I_j] - f^{\tilde{g}}_{1\tilde{b}}[X_1, X_{\tilde{g}}] + [X_1, [X_1, X_{\tilde{b}}]]\right)\\ &= -\gamma^4 e^{-4h}(e^i_1 f^j_{1\tilde{b}}f^k_{ij}I_k + e^i_1 f^{\tilde{g}}_{1\tilde{b}}f^{\tilde{e}}_{i\tilde{g}}X_{\tilde{e}} + e^i_1 f^{\tilde{g}}_{1\tilde{b}}f^1_{i\tilde{g}}X_1 + e^i_1[X_{\tilde{b}}, [I_i, X_1]]\\ &+ e^i_1[X_1, [X_{\tilde{b}}, I_i]] + f^j_{1\tilde{b}}f^{\tilde{e}}_{1j}X_{\tilde{e}} + f^{\tilde{g}}_{1\tilde{b}}[X_1, X_{\tilde{g}}] - [X_1, [X_1, X_{\tilde{b}}]])\\ &= -\gamma^4 e^{-4h}(e^i_1 f^j_{1\tilde{b}}f^k_{ij}I_k + e^i_1 f^{\tilde{g}}_{1\tilde{b}}f^{\tilde{e}}_{i\tilde{g}}X_{\tilde{e}} + e^i_1 f^{\tilde{g}}_{1\tilde{b}}f^1_{i\tilde{g}}X_1 + e^i_1 f^{\tilde{e}}_{i1}[X_{\tilde{b}}, X_{\tilde{e}}]\\ &+ e^i_1 f^1_{i1}[X_{\tilde{b}}, X_1] + e^i_1 f^{\tilde{e}}_{\tilde{b}i}[X_1, X_{\tilde{e}}] + f^j_{1\tilde{b}}f^{\tilde{e}}_{1j}X_{\tilde{e}} + f^{\tilde{g}}_{1\tilde{b}}[X_1, X_{\tilde{g}}] - [X_1, [X_1, X_{\tilde{b}}]])\end{aligned} \tag{B.24}$$

$$\Rightarrow [A_a, F^{ab}] = \begin{cases} [A_{\tilde{a}}, F^{\tilde{a}1}] & \text{für} \quad b = 1, \\ \\ [A_{\tilde{a}}, F^{\tilde{a}\tilde{b}}] + [A_1, F^{1\tilde{b}}] & \text{für} \quad b = \tilde{b}. \end{cases} \tag{B.25}$$

$$= \begin{cases} \gamma^4 e^{-2h}(e^i_{\tilde{a}} f^j_{\tilde{a}1} f^k_{ij} I_k + e^i_{\tilde{a}} f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}1} f^{\tilde{e}}_{i\tilde{g}} X_{\tilde{e}} + e^i_{\tilde{a}} f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}1} f^1_{i\tilde{g}} X_1 \\ +e^i_{\tilde{a}} f^{\tilde{e}}_{i\tilde{a}} [X_1, X_{\tilde{e}}] + e^i_{\tilde{a}} f^1_{i\tilde{a}} [X_1, X_1] + e^i_{\tilde{a}} f^{\tilde{e}}_{1i} [X_{\tilde{a}}, X_{\tilde{e}}] + e^i_{\tilde{a}} f^1_{1i} [X_{\tilde{a}}, X_1] \\ +f^j_{\tilde{a}1} f^{\tilde{e}}_{\tilde{a}j} X_{\tilde{e}} + f^j_{\tilde{a}1} f^1_{\tilde{a}j} X_1 + f^{\tilde{g}}_{\tilde{a}1} [X_{\tilde{a}}, X_{\tilde{g}}] - [X_{\tilde{a}}, [X_{\tilde{a}}, X_1]]) & \text{für} \quad b = 1, \\ \\ -\gamma^4 e^{-4h}(e^i_a f^j_{b\tilde{b}} f^k_{ij} I_k + e^i_c f^{\tilde{g}}_{a\tilde{b}} f^e_{i\tilde{g}} X_e + e^i_a f^e_{ia} [X_{\tilde{b}}, X_e] + e^i_a f^e_{\tilde{b}i} [X_a, X_e] \\ +f^j_{a\tilde{b}} f^e_{aj} X_e + f^{\tilde{g}}_{a\tilde{b}} [X_a, X_{\tilde{g}}] - [X_a, [X_a, X_{\tilde{b}}]]) & \text{für} \quad b = \tilde{b}. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\ddot{X}^b = \begin{cases} \gamma^2 e^{-2h} \ddot{X}^{\tilde{b}} = \gamma^4 e^{-4h} \left(\omega^d_{da} F^{ab} + \omega^b_{cd} F^{cd} + [A_a, F^{ab}] \right) & \text{mit} \quad b = \tilde{b}, \\ \\ \gamma^2 \ddot{X}^1 = \gamma^4 e^{-2h} \left(\omega^d_{da} F^{ab} + \omega^b_{cd} F^{cd} + [A_a, F^{ab}] \right) & \text{mit} \quad b = 1. \end{cases} \tag{B.26}$$

Hierbei ist $\left(\omega^d_{da} F^{ab} + \omega^b_{cd} F^{cd} + [A_a, F^{ab}] \right)$ wie in (8.31).

Anhang C

Herleitung der G-Invarianz-Bedingung

Laut (8.45) ist

$$\Lambda_{\mathscr{M}}(\mathfrak{ad}_j X) = \mathfrak{ad}_{\lambda(j)}\left(\Lambda_{\mathscr{M}}(X)\right), \; X \in \mathscr{M}, \; j \in J \tag{C.1}$$

Betrachte diese Gleichung für $X_a \in \mathscr{M}$. Schreibe $J \ni j = \exp(t\mathfrak{J})$ mit $\mathfrak{J} \in \mathscr{J}$ und weiter den Generator I_a von $\mathscr{M}$ als Ableitung einer Kurve durch die Einheit, $I_a = \frac{d}{ds}\big|_{s=0} \exp(sI_a)$. Aus (*GI2*) ergibt sich dann unter Ausnutzung von Definition 2.2.1 und (3.38) die G-Invarianz-Bedingung (8.49) wie folgt:

$$\begin{aligned}
& \Lambda_{\mathscr{M}}(\mathfrak{ad}_j I_a) = \mathfrak{ad}_{\lambda(j)} \Lambda_{\mathscr{M}}(I_a) \\
\Leftrightarrow\; & \Lambda_{\mathscr{M}}(\mathfrak{Ad}_{j*e} I_a) = \mathfrak{Ad}_{\lambda(j)*e} X_a \\
\Leftrightarrow\; & \Lambda_{\mathscr{M}}(\mathfrak{Ad}_{\exp(t\mathfrak{J})*e} I_a) = \mathfrak{Ad}_{\lambda(\exp(t\mathfrak{J}))*e} X_a \\
\Leftrightarrow\; & \Lambda_{\mathscr{M}} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Big(\mathfrak{Ad}_{\exp(t\mathfrak{J})*e} \exp(sI_a)\Big) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Big(\mathfrak{Ad}_{\lambda(\exp(t\mathfrak{J}))*e} \exp(sX_a)\Big) \\
\Leftrightarrow\; & \Lambda_{\mathscr{M}} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Big(\exp(t\mathfrak{J}) \exp(sI_a) \exp(-t\mathfrak{J})\Big) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Big(\exp(t\mathfrak{J}) \exp(sX_a) \exp(-t\mathfrak{J})\Big)
\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\Leftrightarrow\; \Lambda_{\mathscr{M}} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Big(\mathfrak{J} \exp(sI_a) - \exp(sI_a)\mathfrak{J}\Big) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Big(\mathfrak{J} \exp(sX_a) - \exp(sX_a)\mathfrak{J}\Big) \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\; & \Lambda\Big([\mathfrak{J}, I_a]\Big) = [\mathfrak{J}, X_a] \\
\Leftrightarrow\; & \Lambda\Big([\sum_i a_i I_i, I_a]\Big) = [\sum_i a_i I_i, X_a] \\
\Leftrightarrow\; & \Lambda(f_{ia}^b I_b) = [I_i, X_a] \\
\Leftrightarrow\; & [I_i, X_a] = f_{ia}^b X_b
\end{aligned}$$

(C.3) geht hierbei aus (C.2) durch Differenzieren nach t an der Stelle $t = 0$ hervor.

Anhang D

Bestimmung von $ad_{\mathscr{H}}(\mathscr{G})$für $G/H = SU(3)/SU(2)$

In einer Cartan-Weyl-Basis (8.57) mit (8.56) ist $ad_{h_1}(\mathscr{G})(a,b,c,d,e,f,g,h) = [h_1, ah_1 + bL_3^+ + cL_3^- + dL_1^+ + eL_2^+ + fL_1^- + gL_2^- + hh_2]$ mit Zeilenvektor (a,b,c,d,e,f,g,h), $a,b,c,d,e,f,g,h \in \mathbb{C}$, und analog für $ad_{L_3^\pm}(\mathscr{G})$. Man erhält damit für $\mathfrak{ad}_+ := \mathfrak{ad}_{L_3^+}(\mathscr{G})$, $\mathfrak{ad}_- := \mathfrak{ad}_{L_3^-}(\mathscr{G})$ und $\mathfrak{ad}_1 := \mathfrak{ad}_{h_1}(\mathscr{G})$:

$$\mathfrak{ad}_+ = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2i & . & . & . & . & . \\ i & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & i & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & -i & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{ad}_- = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 2i & 0 & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ -i & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & i & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 & -i & . \\ . & . & . & . & . & 0 & 0 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{ad}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & -i & . & . & . & . & . & . \\ . & . & i & . & . & . & . & . \\ . & . & . & -\frac{i}{2} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & \frac{i}{2} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & \frac{i}{2} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & -\frac{i}{2} & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}. \tag{D.1}$$

Literaturverzeichnis

[1] M.R. Douglas, S. Kachru, *Flux Compactification* (2007), arXiv:hep-th/0610102v3.

[2] K. Becker, M. Becker, J.H. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*, Cambridge University Press (2007).

[3] D. Tong, *String Theory* (2012), arXiv:hep-th/0908.0333v3.

[4] M. Kaku, *Introduction to Superstrings and M-Theorie*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg, 1999.

[5] K. Becker, S. Sethi, *Torsional Heterotic Geometries* (2009), arXiv:hep-th/0903.3769v2.

[6] C. Nölle, *Heterotic Supergravity on manifolds with Killing spinors* (2012), Dissertation, Leibniz Universität Hannover.

[7] O. Lechtenfeld, C. Nölle, A.D. Popov, *Heterotic compactifications on nearly Kähler manifolds* (2010), arXiv:hep-th/1007.0236v1.

[8] R. Blumenhagen, B. Körs, D. Lüst, S. Stieberger, *Four-dimensional String Compactification with D-Branes, Orientifolds and Fluxes* (2007), arXiv:hep-th/0610327v3.

[9] J. Polchinski, *TASI Lectures on D-Branes* (1997), arXiv:hep-th/9611050v2.

[10] C. V. Johnson, *D-Branes*, Cambridge University Press, 2003.

[11] J. Polchinski, *String Theory Volume II: Superstring Theory and Beyond*, Cambridge University Press, 2005.

[12] D.J. Gross, J.A. Harvey, E.J. Martinec, R. Rohm, *The Heterotic String*, Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 502-505.

[13] P. Candelas, G.T. Horowitz, A. Strominger, E. Witten, *Vacuum configurations for superstrings*, Nucl. Phys. B258 (1985) 46-74.

[14] C. P. Boyer, K. Galicki, *Sasakian Geometry, Holonomy, and Supersymmetrie* (2007), arXiv:math/0703231v2.

[15] M. Grana, *Flux compactification in string theory: a comprehensive review* (2005), arXiv:hep-th/0509003v3.

[16] A. Dabholkhar, *Lectures on Orientifolds and Duality* (1998), arXiv:hep-th/9804208v1.

[17] M. Berkooz, M. R. Douglas, R. G. Leigh, *Branes intersecting at angles* (1996), arXiv:hep-th/9606139.

[18] C. Bär, *Real Killing Spinors and Holonomy*, Commun. Math. Phy. 154, 509-521 (1993).

[19] S.S. Gubser, *TASI lectures: special holonomy in string theory and M-theory* (2002), arXiv:hep-th/ 0201114v3.

[20] D. Harland, C. Nölle, *Instantons and Killing spinors* (2012), arXiv:hep-th/1109.3552.

[21] T.A. Ivanova, A.D. Popov, *Instantons on Special Holonomy Manifolds* (2012), arXiv:hep-th/1203.2657v2.

[22] G. Tian, *Gauge theory and calibrated geoemtry I* (2000), arXiv:math/0010015v1.

[23] S. Donaldson, E. Segal, *Gauge theory in higher dimensions, II* (2009), arXiv:0902.3239v1.

[24] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1987.

[25] I. Bauer, T.A. Ivanova, O. Lechtenfeld, F. Lubbe, *Yang-Mils instantons and dyons on homogeneous G_2-manifolds* (2010), arxiv:hep-th/1006.2388v1.

[26] D. Giulini, *Differentialgeometrische Methoden der Physik 1: Riemannsche und Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten*, Vorlesungsskript, Universität Hannover SS 2011.

[27] T. Frankel, *The Geometry of Physics. An Introduction*, Cambridge University Press, 2012.

[28] J.F. Adams, *Lectures on Lie Groups* W.A. Benjamin, Inc. New York (1969).

[29] M.W. Kirson, *Introductory Algebra for Physicists*, Vorlesungsskript, Weizmann Institute of Science, Israel, 2012/13.

[30] D. Giulini, *Differentialgeometrische Methoden der Physik 2: Hauptfaserbündel*, Vorlesungsskript, Universität Hannover SS 2012.

[31] D.P. Želobenko, *Compact Lie-Groups and their Representations*, Translations of Mathematical Monographs Vol.40, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1972).

[32] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry Vol.1*, Interscience Publisher (1963).

[33] C.H. Taubes, *Bundles, Connections, Metrics and Curvature*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 23 Differential Geometry, Oxford University Press, New York (2011).

[34] L. Habermann, *Elemente der Eichfeldtheorie*, Vorlesungsskript Universität Hannover WS 2013/2014.

[35] D. Bleecker, *Gauge Theory and Variational Principles*, Dover Publications Inc., Mineola New York, 1981.

[36] H.B. Lawson jr., M.-L. Michelson, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1989).

[37] W. Ballmann, *Lectures on Kähler Manifolds*, ESI Lectures in Mathematics and Physics, EMS Publishing House (2006).

[38] D.H. Delphenich, *Spacetime G-Structures I:Topological Defects* (2003), arXiv:gr-gc/0304016.

[39] S.S. Chern, *The Geometry of G-structures*, Bull. Am. Math. Soc. 72 (1966), 167-219.

[40] C. Boyer, K. Galicki, *Sasakian Geometry*, Oxford University Press, 2008.

[41] D.E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progress in Mathematics Volume 203, Birkhäuser Boston Basel Berlin, 2002. .

[42] C.C. Hsiung, *Almost Complex and Complex Structures*, Series in Pure Mathematics- Volume 20, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd Singapore New Jersey London Hong Kong (1995).

[43] J. Sparks, *Sasaki-Einstein Manifolds* (2010), arXiv:1004.2461v2.

[44] K. Smoczyk, G. Wang, Y. Zhang, *Sasaki-Ricci Flow*, Int. J. Math. 21, 951 (2010).

[45] C. Stromenger, *Sasakian Manifolds: Differential Forms, Curvature and Conformal Killing Forms*, Dissertation, Universität zu Köln, 2010.

[46] S. Deshmukh, M.M. Tripathi, *A note on Trans-Sasakian Manifolds* (2012), arXiv:1203.0860v1.

[47] R. Abraham, J.E.Marsden,*Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings Publishing Co.Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978.

[48] T.A. Ivanova, O. Lechtenfeld, A.D. Popov, T. Rahn, *Instantons and Yang-Mills Flows on Coset Spaces* (2009), arXiv:hep-th/0904.0654v1.

[49] N. Manton, P. Sutcliffe, *Topological Solitons*, Cambridge University Press, 2004.

[50] D. Harland, A.D. Popov, *Yang-Mills fields in flux compactifications on homogeneous manifolds with $SU(4)$-structure*, arXiv:1005.2837.

[51] M. Tormählen, *Yang-Mills Solutions and Dyons on Cylinders over Coset Spaces with Sasakian Structure* (2014), arXiv:hep-th/1412.7069v1.

[52] S. Bunk, O. Lechtenfeld, A.D. Popov, M. Sperling, *Instantons on conical half-flat 6-manifolds* (2015), arXiv: hep-th/1409.0030v2.

[53] F. Quevedo, *Lectures on Superstring Phenomenology* (1996), arXiv:hep-th/9603074.

[54] K.S. Stelle, *BPS Branes in Supergravity* (2009), arXiv:hep-th/9803116v3.

[55] S. Bunk, T.A. Ivanova, O. Lechtenfeld, A.D. Popov, M. Sperling, *Instantons on sine-cones over Sasakian manifolds* (2014), arXiv: hep-th/1407.2948v1.

[56] D. Bailin, A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Graduate Student Series in Physics, Institute of Physics Publishing, 1994.

[57] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie-Groups and Symmetric Spaces*, Graduate Studies in Mathematics Vol.34, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2001).

[58] R.N. Cahn, *Semi-simple Lie Algebras and Their Representations*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1984.

[59] K. Smoczyk, *Analysis 3*, Vorlesungsskript, Universität Hannover WS 2006.

[60] I. Kolár, P.W. Michor, J. Slovák, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1993).

[61] S. Waldmann, *Poisson-Geometrie und Deformationsquantisierung*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007).

[62] C.P. Boyer, K. Galicki, *3-Sasakian Manifolds* (1998), arXiv:hep-th/9810250.